A. HOLLINGER

E. GEORGESCU-BUZĂU

ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XII-a LICEU, SECȚIA REALĂ ȘI ANUL IV, LICEE DE SPECIALITATE

XII

$$P(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1971

CAPITOLUL I

POLINOAME

1.0. INTRODUCERE

În primele patru capitole ale acestui manual se tratează ecuațiile algebrice, adică ecuațiile de forma $P(x) = 0$ unde $P(x)$ este un polinom. De aceea este necesar să reluăm noțiunea de polinom, cunoscută din clasele anterioare, pentru a aduce unele precizări și completări.

1.1. PRECIZĂRI ȘI COMPLETĂRI

1.1.1. Noțiunea de polinom. După cum se știe, expresii ca

$$P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 7x + 10,$$

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x - 2y + 6,$$

$$P(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - xy + 2yz + x + y - 10$$

se numesc polinoame. Primul este un polinom cu o singură variabilă, al doilea — cu două, iar al treilea — cu trei variabile.

În acest manual vor interveni numai polinoame cu o singură variabilă, pe care le vom numi, scurt, polinoame. Deci, un polinom este o expresie de forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

în care coeficienții a_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sînt numere întregi, raționale, reale sau complexe, n este un număr natural, iar x este o variabilă care parcurge o mulțime numerică determinată, Z, Q, R sau C.

Un polinom este un simbol care indică un *şir de operaţii* (ridicări la putere, înmulţiri şi adunări) ce se fac cu o valoare a variabilei (necunoscutei) şi cu coeficienţii. Astfel, polinomul $3x^2 - 5x + 8$ indică următoarele operaţii: numărul x (raţional, real sau complex) se ridică la pătrat şi se înmulţeşte cu 3; acelaşi număr se înmulţeşte cu (-5), şi produsul se adună cu primul; rezultatul se adună cu 8.

1.1.2. Exemple. a) $P(x) = 3x^5 - \frac{2}{5}x^4 + \pi x^2 - \sqrt{3}x + 4$ este un polinom cu coeficienţi reali, $a_0 = 3$, $a_1 = -\frac{2}{5}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \pi$, $a_4 = -\sqrt{3}$, $a_5 = 4$. (Termenii cu coeficientul zero nu se scriu.)

b) $Q(x) = \mathrm{i}x^3 - 7x^2 + (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})x + 4$

este un polinom cu coeficienţi complecşi, $a_0 = \mathrm{i}$, $a_1 = -7$, $a_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $a_3 = 4$. (Numerele -7 şi 4 sînt privite ca numere complexe: $-7 = -7 + 0\mathrm{i}$, $4 = 4 + 0\mathrm{i}$.

1.1.3. Mulţimea căreia îi aparţin coeficienţii unui polinom şi variabila. Spre deosebire de felul cum se procedează de cele mai multe ori în clasele mai mici, cînd coeficienţii sînt literali, trebuie să se precizeze totdeauna cărei mulţimi numerice îi aparţin (Z, Q, R, C). Acest lucru este necesar din motivul următor.

Polinoamele cu coeficienţi dintr-o mulţime mai restrînsă au unele proprietăţi pe care nu le au polinoamele ai căror coeficienţi aparţin unei mulţimi mai cuprinzătoare. Astfel, polinoamele cu coeficienţi reali au unele proprietăţi pe care nu le au polinoamele cu coeficienţi complecşi, după cum polinoamele cu coeficienţi raţionali au unele proprietăţi pe care nu le au polinoamele cu coeficienţi reali ş.a.m.d.

Cît despre mulţimea pe care o parcurge variabila, ea este de obicei aceeaşi ca mulţimea căreia îi aparţin coeficienţii sau mai cuprinzătoare. Deoarece $Z \subset Q \subset R \subset C$, se poate considera totdeauna că coeficienţii ecuaţiei aparţin mulţimii în care variabila ia valori.

În primele două capitole ale acestei cărţi vom trata polinoame cu coeficienţi complecşi, în care variabila ia valori complexe. Pentru a ţine prezent în minte acest lucru, vom folosi pentru variabilă litera z. Dat fiind că $Z \subset Q \subset R \subset C$, tot ce vom spune rămîne valabil şi pentru polinoame cu coeficienţii în oricare din aceste mulţimi, cu condiţia ca variabila să ia valori complexe.

1.1.4. Gradul unui polinom. Polinomul

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$$

este de gradul n, dacă $a_0 \neq 0$.

Polinoamele de mai sus (1.1.2.) au, respectiv, gradele 5 și 3.

Condiția $a_0 \neq 0$ este esențială. De exemplu, polinomul

$$0z^4 + 0z^3 + 5z^2 - 3z + 8$$

este de gradul 2, nu 4.

Coeficientul $a_n = a_nz^0$ se numește *termenul liber* al polinomului. Un polinom poate fi format numai din termenul său liber. De exemplu polinomul 3, care este același polinom ca

$$0z + 3,\ 0z^2 + 0z + 3, \dots,\ 0z^n + 0z^{n-1} + \dots + 0z + 3.$$

Gradul unui asemenea polinom este zero.

Vom considera și polinomul special, notat cu P^*,

$$P^* = 0z^n + 0z^{n-1} + \dots + 0z + 0,$$

cum ar fi: $0z + 0$ sau $0z^2 + 0z + 0$ ș.a.m.d., în care toți coeficienții sînt nuli. Acest polinom se numește *polinomul nul*. El nu are grad.

Gradul unui polinom joacă uneori rolul pe care-l joacă „mărimea" unui număr real (v. problema 30).

1.1.5. Operații cu polinoame. Regulile după care se fac aceste operații sînt cunoscute din clasele anterioare. Motivul pentru care s-au format tocmai aceste reguli, nu altele, va fi arătat mai jos (1.1.8.). Aici ne mărginim să menționăm că ele sînt valabile și în cazul polinoamelor cu coeficienți complecși.

1.1.6. Gradul sumei și al produsului. Fie P un polinom de gradul m și Q un polinom de gradul n,

$$\text{gr.}\, P = m, \qquad \text{gr.}\, Q = n.$$

a) Dacă $m > n$, gradul sumei $P + Q$ este m, căci primul termen al sumei este primul termen din P. Dacă însă $m = n$, gradul sumei este egal cu gradul lor sau mai mic, căci se poate ca primul termen, sau primii doi termeni etc. să se reducă.

Același lucru se poate spune despre gradul diferenței $P(z) - Q(z)$. În adevăr, $P - Q = P + (-Q)$, căci pentru a scădea Q din P se adună P cu polinomul care se obține schimbînd semnele tuturor coeficienților polinomului Q, iar $\text{gr.}(-Q) = \text{gr.}\, Q$.

Așadar,

$$\text{gr.}\ (P \pm Q) \leqslant \max.\ (\text{gr.}\ P,\ \text{gr.}\ Q)^*.$$

b) Gradul produsului lor este $m + n$. În adevăr, dacă $P = a_0z^m + + \ldots$, $Q = b_0z^n + \ldots$, atunci $PQ = a_0b_0z^{m+n} + \ldots$

1.1.7. Funcția-polinom. Considerăm, de exemplu, polinomul

$$2z^2 - 5z + 7.$$

El indică un șir de operații care duc, pentru fiecare valoare a lui z, la un număr bine determinat, dar în algebra elementară nu se arată precis care sînt toate valorile pe care le poate lua z. Dacă se precizează care este mulțimea E a valorilor pe care le poate lua z, de exemplu $E = \{1, 2, 3\}$, se poate defini o funcție $P : E \rightarrow R$ dată de relația

$$P(z) = 2z^2 - 5z + 7.$$

Calculul dă:

$$P(1) = 4, \qquad P(2) = 5, \qquad P(3) = 10.$$

În acest exemplu, s-a dat un polinom (cu coeficienți întregi) și cu ajutorul lui, am definit o funcție. Același lucru se poate face în cazul oricărui polinom, dar mulțimea de definiție nu se ia la întîmplare. Prezintă interes cazul în care se ia ca mulțime de definiție una dintre mulțimile Z, Q, R sau C. Funcțiile astfel definite se numesc *funcții-polinom* sau *funcții polinomiale*.

---

* a și b fiind două numere reale, prin max. (a, b) se înțelege cel mai mare dintre numerele a și b. Dacă $a = b$, max. $(a, b) = a = b$.

De exemplu: max. $(3, 4) = 4$, max. $(2,2) = 2$. Un sens analog are simbolul min. (a, b).

Exemple. 1) Cu ajutorul polinomului $z^2 + 3iz - 4$, cu coeficienți complecși, se poate defini funcția

$$P : C \to C, \text{ dată de relația } P(z) = z^2 + 3iz - 4.$$

2) Cu ajutorul polinomului cu coeficienți reali $x^3 - 5x + \sqrt{2}$ se pot defini funcțiile

$$P_1 : R \to R, \text{ cu } P_1(x) = x^3 - 5x + \sqrt{2} \ (x \in R)$$

și

$$P_2 : C \to C, \text{ cu } P_2(z) = z^3 - 5z + \sqrt{2} \ (z \in C).$$

3) Cu ajutorul polinomului cu coeficienți întregi $x^4 - 3x + 4$ se pot defini funcțiile:

$$P_1 : Z \to Z, \ P_2 : Q \to Q, \ P_3 : R \to R \text{ și } P_4 : C \to C,$$

prin relația $P_i(x) = x^4 - 3x + 4$, unde x parcurge respectiv una dintre mulțimile Z, Q, R sau C.

Cazul cel mai important pentru teoria ecuațiilor algebrice este cel al polinoamelor cu coeficienți reali în care variabila ia valori complexe.



O funcție-polinom este o funcție $P : M \to M$, unde M este una dintre mulțimile Z, Q, R sau C, dată de o relație de forma

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \ a_0, \ a_1, \ldots, a_n \in M.$$

Exemplele de mai sus se încadrează în această definiție, deși acolo mulțimea în care funcția ia valori a fost uneori mai cuprinzătoare decît mulțimea căreia îi aparțin coeficienții, căci se poate considera că coeficienții aparțin mulțimii mai cuprinzătoare. Astfel, în cazul în care polinomul are coeficienți reali, iar variabila ia valori complexe, putem considera coeficienții ca numere complexe ($R \subset C$).

Deosebirea dintre funcția polinomială și polinom este următoarea: o funcție P este definită cînd se dau mulțimea de definiție E, mulțimea F în care funcția ia valori și un *procedeu* prin care se asociază fiecărui element x din E un element unic $P(x)$ din F. Polinomul, ca expresie algebrică, este numai al treilea dintre aceste elemente: el ne dă numai procedeul prin care se află pentru fiecare element $x \in E$ elementul corespunzător $P(x)$ din F.

Pentru prescurtare, se spune *polinom* în loc de *funcție-polinom*, deci *valoarea polinomului* în loc de *valoarea funcției-polinom*.

1.1.8. **Operații cu polinoame, operații cu funcții-polinom.** Acum putem arăta care este sensul regulilor de calcul cu polinoame (v. 1.1.5).

După cum se știe, două funcții f și g sînt egale cînd sînt definite pe aceeași mulțime M și valorile lor pentru aceleași valori ale variabilei sînt aceleași:

$$[f = g] \Leftrightarrow [\forall x, \quad x \in M \; f(x) = g(x)]^*.$$

Cu alte cuvinte, două funcții egale sînt una și aceeași funcție.

*Regulile de calcul cu polinoame sînt astfel întocmite încît să dea funcții egale***.

De exemplu:

$$(2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Se spune că expresiile care figurează de o parte și de alta a semnului „=" au aceeași „valoare numerică" oricare ar fi valoarea lui x.

Sensul precis al acestei relații este următorul:

Se dau polinoamele $2x + 1$ și $x - 3$. Apoi se consideră funcțiile:

$$A : R \to R, \; A(x) = 2x + 1, \qquad B : R \to R, \; B(x) = x - 3,$$

$$P : R \to R, \; P(x) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Regula de înmulțire a polinoamelor ne garantează că, oricare ar fi $x \in R$,

$$A(x)B(x) = P(x).$$

---

* Simbolul $\forall$ se citește: „*oricare ar fi*" sau: „*pentru orice*". De exemplu, $\forall x$, $x \in M$... se citește: „*oricare ar fi x, x* aparținînd lui M..." sau: „*pentru orice x*, x aparținînd lui M..." Pentru prescurtare, se poate citi: „*oricare ar fi x din M*..."

Simbolul $\exists$ se citește: „*există* (cel puțin) *un*". De exemplu, $\exists c$, $c \in Z$, astfel încît să avem $a = bc$ se citește: „*există un c* aparținînd lui Z astfel încît..."

Simbolul $\forall$ se numește *cuantificator universal*, iar simbolul $\exists$ se numește *cuantificator existențial*.

** Acest lucru nu este adevărat pentru orice calcul algebric. De exemplu

$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}.$$

Aceste două fracții nu au aceeași valoare pentru „orice valoare" a lui x. Pentru $x = 1$, prima n-are sens, iar a doua are o valoare bine determinată $\frac{1}{2}$.

Situația este analogă în cazul celorlalte operații cu polinoame.

Pentru a exprima că procedeele indicate de două expresii algebrice definesc aceeași funcție (dacă se ia aceeași mulțime de definiție) vom folosi cuantificatorul universal $\forall$ și vom preciza care este mulțimea de definiție. Vom scrie, de exemplu,

$$\forall x,\ x \in R\ (2x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 5x - 3.$$

Această afirmație este echivalentă cu următoarea: funcțiile $f : R \to R$, $f(x) = (2x + 1)(x - 3)$ și $g : R \to R$, $g(x) = 2x^2 - 5x - 3$ sînt egale.

Pentru prescurtare, vom renunța de multe ori la cuantificatorul dar vom menționa că este vorba de o identitate*; mulțimea în care variabila ia valori va fi subînțeleasă.

1.1.9. **Observare despre simbolul $P(x)$.** Pentru a ne conforma unui obicei înrădăcinat, vom folosi simbolul $P(x)$ sau $P(z)$ cu două semnificații. Pe de o parte $P(z)$ reprezintă polinomul însuși, ca expresie algebrică, care indică un șir de operații. De exemplu,

$$P(z) = 2z^2 - 5z - 3.$$

Aici $P(z)$ este un simbol care reprezintă unul și același lucru cu expresia $2z^2 - 5z - 3$.

Pe de altă parte, $P(z)$ reprezintă valoarea funcției corespunzătoare $P : C \to C$ pentru o valoare oarecare z a argumentului. În acest sens se scrie „ecuația $P(z) = 0$".

Un polinom, ca șir de operații, nu poate fi egal cu zero sau cu un alt număr; valoarea funcției respective poate fi egală cu zero. De exemplu, forma generală a unei ecuații în care ambele părți sînt polinoame (de exemplu: $2z^2 + z = z^2 - z - 3$) este

$$P(z) = Q(z).$$

Aici nu polinoamele sînt egale — două polinoame egale sînt unul și același polinom — ci valorile celor două funcții — polinom pentru o valoare a argumentului care urmează să fie determinată sînt egale.

---

* În unele cărți se folosește semnul „$\equiv$". Acest semn trebuie evitat din două motive. Primul: el nu este destul de precis, prin faptul că nu se arată ce se înțelege prin „orice valoare"; al doilea: el nu se folosește în mod consecvent; el ar trebui folosit la cele mai multe calcule algebrice și în trigonometrie. De exemplu, ar trebui scris $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, ceea ce de obicei nu se face.

1.2. POLINOAME IDENTICE

1.2.1 Polinoame egale, polinoame identice. a) Orice expresie algebrică indică un şir de operaţii. Atunci două expresii algebrice, în special două polinoame, sînt egale dacă indică aceleaşi operaţii; ele sînt una şi aceeaşi expresie scrisă de două ori. De exemplu, polinomul $3z^2 - 5z + 2$ indică operaţiile: ridicarea lui z la pătrat, înmulţirea lui z^2 cu 3 ş.a.m.d. Polinomul $az^2 + bz + c$ ne indică aceleaşi operaţii dacă şi numai dacă $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$, şi numai în acest caz cele două polinoame sînt egale.

În general, polinoamele

$$a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m \text{ şi } b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$$

sînt egale dacă şi numai dacă $m = n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_n$.

b) Pe de altă parte orice polinom ne dă un procedeu care poate intra în definiţia unei funcţii. De exemplu, cu ajutorul polinomului $3z^2 - 5z + 2$ se poate defini funcţia $P : C \to C$ dată de relaţia $P(z) = 3z^2 - 5z + 2$. Două polinoame care definesc aceeaşi funcţie se numesc *polinoame identice.*

Sensul precis al acestei afirmaţii este următorul. Fie

$$a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m \text{ şi } b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n$$

două polinoame cu coeficienţi complecşi şi z o variabilă complexă. Aceste polinoame sînt identice dacă şi numai dacă funcţia $P : C \to C$ dată de relaţia

$$P(z) = a_0z^m + a_1z^{m-1} + \ldots + a_m$$

este egală cu funcţia $Q : C \to C$ dată de relaţia

$$Q(z) = b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Este evident că două polinoame egale sînt identice. Se pune problema *dacă şi reciproca acestei propoziţii este adevărată*, adică: fiind dată, de exemplu, funcţia:

$$P : C \to C, \; P(z) = z^3 - 5z + 2,$$

există și un polinom $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ diferit de $z^3 - 5z + 2$ astfel încît funcția

$$Q : C \to C,\ Q(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$$

să fie egală cu funcția P? În cazul expresiilor algebrice sau trigonometrice oarecare, răspunsul este negativ. De exemplu, funcțiile

$$f : R \to R,\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ și}$$

$$g : R \to R,\ g(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1}}$$

sînt egale, după cum se poate verifica ridicînd ambele expresii la pătrat (ele sînt pozitive pentru orice valoare a lui x).

De asemenea, funcțiile

$f : R \to R, f(x) = \sin 2x$ și $g : R \to R, g(x) = 2 \sin x \cos x$ sînt egale, deși expresiile $\sin 2x$ și $2 \sin x \cos x$ sînt diferite.

În cele ce urmează, vom trata această problemă, care este fundamentală pentru teoria operațiilor cu polinoame. Vom trata întîi cazul particular cînd funcția definită de un polinom este funcția constantă zero.

1.2.2. Polinom identic nul. a) *Definiție.* Fie

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$$

un polinom cu coeficienți complecși.

Polinomul $P(z)$ este identic nul dacă și numai dacă valoarea sa este zero pentru orice valoare complexă a lui z.

Cu alte cuvinte, polinomul $P(z)$ este identic nul dacă și numai dacă funcția $P : C \to C$ definită prin relația

$$P(z) = a_0z^n + a_1\ z^{n-1} + \dots + a_n$$

este funcția constantă $P(z) = 0$*.

b) Punem problema: ce condiție trebuie să îndeplinească coeficienții unui polinom ca polinomul să fie identic nul?

* În acest enunț, simbolul $P(z)$ apare cu două semnificații diferite. Prima oară $P(z)$ reprezintă polinomul, iar a doua oară valoarea polinomului (v. 1.1.9). Această ambiguitate va apare deseori.

Este evident că polinomul nul, adică

$$P^* = 0z^n + 0z^{n-1} + \dots + 0z + 0,$$

ai cărui coeficienți sînt toți nuli, ia valoarea zero pentru orice valoare a lui z;

$$[a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0] \Rightarrow [\forall z, z \in C \qquad P(z) = 0]. \qquad (1)$$

Vom demonstra implicația inversă: dacă polinomul $P(z)$ este identic nul, toți coeficienții săi sînt nuli. Pentru a fixa ideile, vom lua cazul unui polinom de gradul III,

$$P(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3.$$

Presupunem că polinomul se anulează pentru mai multe valori diferite ale lui z, $z = z_1$, $z = z_2$ ş.a.m.d. (prin ipoteză, astfel de valori există cîte vrem) și căutăm să aflăm coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3. Fiindcă avem patru necunoscute, luăm patru valori diferite ale lui z și formăm patru ecuații:

$$P(z_1) = a_0z_1^3 + a_1z_1^2 + a_2z_1 + a_3 = 0,$$
$$P(z_2) = a_0z_2^3 + a_1z_2^2 + a_2z_2 + a_3 = 0,$$
$$P(z_3) = a_0z_3^3 + a_1z_3^2 + a_2z_3 + a_3 = 0,$$
$$P(z_4) = a_0z_4^3 + a_1z_4^2 + a_2z_4 + a_3 = 0.$$

Am format astfel un sistem de patru ecuații liniare și omogene cu cele patru necunoscute a_0, a_1, a_2, a_3. Determinantul acestui sistem este

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1^3 & z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^3 & z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^3 & z_3^2 & z_3 & 1 \\ z_4^3 & z_4^2 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Este determinantul lui Vandermonde (au apărut liniile în locul coloanelor și invers cu unele intervertiri). Se știe că

$$\Delta = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4).$$

Deoarece $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq z_3, \dots,$ $z_3 \neq z_4$, acest produs este diferit de zero, deci $\Delta \neq 0$. Rezultă că sistemul nostru admite o singură soluție, și anume soluția banală

$$a_0 = 0, \; a_1 = 0, \; a_2 = 0, \; a_3 = 0,$$

ceea ce înseamnă că, dacă polinomul $P(z)$ este identic, nul, toţi coeficienţii săi sînt nuli.

Aceeaşi demonstraţie se poate face pentru un polinom de orice grad. Deci, în general, în cazul polinomului $P(z)$, de gradul n,

$$[\forall z,\ z \in C\ P(z) = 0] \Rightarrow [a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0]. \qquad (2)$$

Pe baza implicaţiilor (1) şi (2) putem enunţa:

Un polinom $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ este identic nul dacă şi numai dacă toţi coeficienţii săi sînt nuli (adică $P(z) = P^*$).

$$[\forall z,\ z \in C,\ P(z) = 0] \Leftrightarrow [a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0\ \ (P(z) = P^*)].$$

1.2.3. Observări. 1) În demonstraţia teoremei de mai sus nu am folosit toată ipoteza. Se presupune că polinomul se anulează pentru orice valoare a lui z, iar noi am folosit, în cazul polinomului de gradul III, numai patru valori (căci avem patru coeficienţi, deci ne-au trebuit patru ecuaţii). Putem enunţa teorema mai tare:

Dacă un polinom $P(z)$ de gradul n se anulează pentru $n + 1$ valori ale lui z, polinomul este identic nul.

Cu alte cuvinte: o ecuaţie algebrică de gradul n are cel mult n rădăcini

2) În cursul demonstraţiei s-a folosit şi faptul următor: dacă un polinom de gradul n se anulează pentru *orice* valoare a lui z putem găsi $n + 1$ valori ale lui z care-l anulează. Acest lucru se poate face cîtă vreme mulţimea de definiţie a funcţiei corespunzătoare este infinită, cum este mulţimea C. Demonstraţia nu mai este valabilă, şi teorema nu mai este adevărată, dacă acea mulţime este finită. Dacă, însă, mulţimea de definiţie este finită, formată din n elemente şi operaţiile au aceleaşi proprietăţi ca în cazul numerelor, teorema rămîne adevărată pentru polinoame de grad $\leqslant n - 1$.

De asemenea, s-a folosit faptul că dacă toţi factorii unui produs sînt diferiţi de zero, produsul este diferit de zero. Dacă variabila z ia valori într-o mulţime în care această propoziţie nu este adevărată, demonstraţia nu mai este valabilă şi teorema nu mai este adevărată.

3) Noţiunile de polinom nul, P^*, şi polinom identic nul nu trebuie confundate, dar ultima teoremă arată că *singurul polinom identic nul este polinomul nul*, adică singurul polinom care ia valoarea zero pentru orice valoare a variabilei este polinomul în care toţi coeficienţii sînt nuli.

1.2.4. Condiția ca două polinoame să fie identice. Acum putem rezolva problema pusă la începutul acestui paragraf (1.2.1): cînd sînt două polinoame identice?

Considerăm polinoamele

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{și}$$
$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Este evident că dacă coeficienții acelorași puteri ale lui z (pe scurt: coeficienții corespunzători) sînt aceiași în ambele polinoame, cele două polinoame sînt identice, căci sînt unul și același polinom.

$$[a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_n = b_n] \Rightarrow [\forall z,\ z,\ z \in C \quad P(z) = Q(z)]. \quad (3)$$

Pentru a demonstra implicația inversă, considerăm polinoamele de mai sus și judecăm astfel:

Dacă cele două polinoame iau aceeași valoare pentru orice valoare complexă a lui z, diferența lor este egală cu zero pentru orice valoare complexă a lui z, adică polinomul

$$P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0)z^n + (a_1 - b_1)z^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})z + a_n - b_n$$

este identic nul. Aplicînd teorema precedentă, rezultă că

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0, \ldots,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0,\ a_n - b_n = 0$$

sau

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1},\ a_n = b_n,$$

ceea ce înseamnă că coeficienții corespunzători sînt egali. Deci

$$[\forall z,\ z \in C \quad P(z) = Q(z)] \Rightarrow [a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_n = b_n]. \quad (4)$$

Pe baza implicațiilor (3) și (4) putem enunța:

Două polinoame

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$
$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n$$

sînt identice dacă și numai dacă coeficienții lor corespunzători sînt egali.

$$[\forall z,\ z \in C \quad P(z) = Q(z)] \Leftrightarrow [a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n].$$

1.2.5. Observări. 1) Faptul că în cele două polinoame primul termen conține z la aceeași putere ar putea da impresia că trebuie pusă condiția ca cele două polinoame să fie de aceľași grad. Dar acest lucru nu este necesar, căci în demonstrație nu intervine nicăieri faptul că $a_0 \neq 0$ sau $b_0 \neq 0$. Totul este ca în ambele polinoame să figureze aceleași puteri ale lui z, ca fiecărui coeficient dintr-un polinom să-i corespundă un coeficient al celuilalt polinom. Dacă polinoamele nu sînt de același grad, se adaugă la polinomul de grad mai mic unul sau mai mulți termeni cu coeficientul zero. De exemplu, în cazul cînd polinoamele sînt

$$P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e, \qquad Q(z) = mz^2 + mz + p,$$

polinomul al doilea se scrie:

$$Q(z) = 0z^4 + 0z^3 + mz^2 + nz + p$$

și condiția ca $P(z)$ să fie identic cu $Q(z)$ este:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = m, \quad d = n, \quad e = p.$$

2) Din cele arătate la 1.2.3, obs. 2 rezultă că pentru ca două polinoame de gradul n să fie identice este suficient ca ele să ia valori egale pentru $n + 1$ valori ale variabilei (nu pentru toate). Acest lucru se întîmplă numai la funcții-polinom. O funcție oarecare este definită cînd se dau valorile ei pentru toate valorile variabilei din mulțimea ei de definiție, nu numai pentru unele din ele.

3) În algebra elementară, regulile de calcul cu polinoame se justifică prin faptul că ele duc la funcții egale, adică la identități (v. 1.1.8). De exemplu, suma polinoamelor

$$P(z) = 2z^2 - 7z + 3 \quad \text{și} \quad Q(z) = z^2 + 5z - 8$$

este polinomul

$$S(z) = 3z^2 - 2z - 5$$

pentru că, oricare ar fi z ($z \in C$, $z \in R$, etc.) numărul $S(z)$ este suma numerelor $P(z)$ și $Q(z)$.

Algebra elementară ne învață cum se află un polinom care să îndeplinească această condiție, dar ea nu ne garantează că $S(z)$ este singurul polinom care să aibă această însușire. Numai ultima teoremă ne dă această garanție.

1.2.6. Metoda coeficienților nedeterminați. Teorema de la 1.2.4. stă la baza metodei coeficienților nedeterminați, pe care o vom pune în evidență prin exemplele următoare:

1) *Să se pună polinomul*

$$P(z) = 2z^3 - 5z^2 - 8z + 7$$

sub forma

$$E(z) = a(z - 2)^3 + b(z - 2)^2 + c(z - 2) + d.$$

Efectuînd calculele, se obține

$$Q(z) = az^3 + (-6a + b)z^2 + (12a - 4b + c)z + (-8a + 4b - 2c + d).$$

Acum judecăm astfel:

Polinomul $Q(z)$ s-a obținut efectuînd operațiile indicate în $E(z)$, deci expresiile $E(z)$ și $Q(z)$ definesc aceeași funcție (1.1.5.). Atunci $E(z)$ va fi identic cu $P(z)$ dacă și numai dacă $Q(z)$ va fi identic cu $P(z)$. Aplicăm teorema de la 1.2.4.

Egalînd coeficienții corespunzători ai polinoamelor $P(z)$ și $Q(z)$, se obține

$$a = 2,\ -6a + b = -5,\ 12a - 4b + c = -8,\ -8a + 4b - 2c + d = 7.$$

Acest sistem de ecuații dă: $a = 2$, $b = 7$, $c = -4$, $d = -13$. Deci,

$$2z^3 - 5z^2 - 8z + 7 = 2(z-2)^3 + 7(z-2)^2 - 4(z-2) - 13.$$

Se spune că am dezvoltat polinomul $P(z)$ după puterile descrescătoare ale lui $(z - 2)$.

2) *Să se determine constantele reale A, B, C astfel încît să aibă loc identitatea*

$$\forall x,\ x \in R \setminus \{-1, 1, 2\}\ \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}.$$

Scăpăm de numitori:

$$2x + 1 = A(x-1)(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1).$$

Efectuăm înmulțirile și ordonăm după puterile descrescătoare ale lui x. Obținem

$$2x + 1 = (A + B + C)x^2 + (-3A - B)x + 2A - 2B - C.$$

Egalăm coeficienții corespunzători:

$$A + B + C = 0,\ -3A - B = 2,\ 2A - 2B - C = 1,$$

de unde

$$A = -\frac{1}{6},\quad B = -\frac{3}{2},\quad C = \frac{5}{3}.$$

Deci,

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-2}.$$

Se spune că fracția $\frac{2x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ a fost *descompusă în fracții simple*. Asemenea descompuneri sînt necesare în calculul integral.

1.3. ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

1.3.1. **Recapitulare.** Fiind date două polinoame, $D(z)$ și $I(z)$ cu coeficienți din Q, R sau C, $I(z)$ fiind diferit de polinomul nul, a împărți primul dintre aceste polinoame prin cel de-al doilea înseamnă a găsi două polinoame $C(z)$ și $R(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea:

$$\forall z,\ z \in C \quad D(z) = I(z) \cdot C(z) + R(z)$$

și gradul lui $R(z)$ să fie mai mic decît gradul lui $I(z)$ sau $R(z)$ să fie polinomul nul.

Polinoamele $D(z)$, $I(z)$, $C(z)$ și $R(z)$ se numesc, respectiv, *deîmpărțitul*, *împărțitorul*, *cîtul* și *restul*.

În clasele anterioare s-a învățat un algoritm (procedeu) prin care se pot afla cîtul și restul. De exemplu, pentru

$$D(z) = 3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6, \quad I(z) = z^2 - 2z + 4,$$

se obțin cîtul și restul

$$C(z) = 3z^2 - z - 2, \quad R(z) = 3z + 2.$$

Are loc identitatea

$$(*) 3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6 = (z^2 - 2z + 4)(3z^2 - z - 2) + 3z + 2.$$

Algoritmul se poate aplica și în cazul polinoamelor cu coeficienți complecși.

De vreme ce cunoaştem un procedeu după care putem afla cîtul şi restul, problema existenţei nu se mai pune; ele există totdeauna (oricare ar fi polinoamele $D(z)$ şi $I(z)$). Mai mult, cîtul şi restul sînt *unice* (v. 1.3.3.).

Menţionăm că, dacă dăm lui z o valoare $z = a$, relaţia dintre deîmpărţit, împărţitor, cît şi rest, devine relaţia numerică $D(a) = I(a)C(a) + R(a)$, dar aceasta nu înseamnă că $C(a)$ şi $R(a)$ sînt, respectiv, cîtul şi restul împărţirii numărului $D(a)$ prin numărul $I(a)$. Astfel, în exemplul polinoamelor cu coeficienţi numerici de mai sus, $D(3) = 165$, $I(3) = 7$, $C(3) = 22$, $R(3) = 11$. Relaţia (*) devine $165 = 7 \cdot 22 + 11$; ea este adevărată dar 22 şi 11 nu sînt cîtul şi restul împărţirii lui 165 prin 7.

1.3.2. **Folosirea metodei coeficienţilor nedeterminaţi.** Împărţirea se poate face şi prin această metodă. Reluăm exemplul precedent. Deoarece gr. $D(z) = 4$ şi gr. $I(z) = 2$, cîtul va fi de gradul $4 - 2 = 2$, iar gradul restului va fi cel mult 1. Trebuie deci să aflăm un polinom de gradul II, $C(z) = az^2 + bz + c$, şi un polinom de grad I, $R(z) = dz + e$, astfel încît să aibă loc identitatea

$$3z^4 - 7z^3 + 12z^2 + 3z - 6 = (z^2 - 2z + 4)\ (az^2 + bz + c) + dz + e.$$

Efectuăm operaţiile din partea dreaptă şi obţinem:

$$az^4 + (-2a + b)z^3 + (4a - 2b + c)z^2 + (4b - 2c + d)z + 4c + e.$$

Egalăm coeficienţii corespunzători:

$$a = 3,\quad -2a + b = -7,\quad 4a - 2b + c = 12,\quad 4b - 2c + d = 3,$$
$$4c + e = -6.$$

Acest sistem de 5 ecuaţii cu 5 necunoscute dă:

$$a = 3,\ b = -1,\ c = -2,\ d = 3,\ c = 2.$$

Deci cîtul şi restul sînt:

$$az^2 + bz + c = 3z^2 - z - 2, \qquad dz + e = 3z + 2.$$

1.3.2. **Unicitatea cîtului şi a restului.** Fiind date două polinoame $D(z)$ şi $I(z)$, procedeul uzual de împărţire ne dă *un* polinom $C(z)$ şi *un* polinom $R(z)$, astfel încît să aibă loc identitatea:

$$D = IC + R, \qquad \text{gr.}R < \text{gr.}I \tag{1}$$

(pentru a simplifica scrisul, n-am mai scris litera z). Aceasta nu înseamnă că polinoamele $C(z)$ şi $R(z)$ găsite astfel sînt singurele care satisfac această condiţie. S-ar putea ca printr-un alt procedeu să se obţină un alt cît şi un alt rest? Vom demonstra că acest lucru nu este posibil.

Demonstraţia se face prin reducere la absurd.

Presupunem că ar exista alte două polinoame, C' şi R', care satisfac de asemenea condiţia

$$D = IC' + R', \qquad \text{gr. } R' < \text{gr.} I. \tag{2}$$

Scăzînd (2) din (1), se obţine identitatea

$$I(C - C') = R' - R. \tag{3}$$

Comparăm gradele celor două polinoame scrise de o parte şi de alta a semnului „=". Dacă $C \neq C'$, diferenţa $C - C'$ nu este polinomul nul, deci ea este un polinom constant sau un polinom de grad > 0. Înmulţind I cu un polinom de grad $\geqslant 0$, se obţine un produs de grad cel puţin egal cu gradul lui I, deci

$$\text{gr.} I(C - C') \geqslant \text{gr.} I. \tag{4}$$

Cît despre polinomul din partea dreaptă, avem (1.1.6)

$$\text{gr. } (R' - R) \leqslant \max.(\text{gr.} R', \text{ gr.} R).$$

Dar R şi R' sînt de grad mai mic decît I, deci max. (gr. R', gr. R) $<$ gr. I. Rezultă că

$$\text{gr.}(R' - R) < \text{gr. } I. \tag{5}$$

Rezultatele (4) şi (5) sînt contradictorii, căci ar însemna că în identitatea (3) polinomul din stînga să fie de grad mai mare decît cel din dreapta. Rezultă că presupunerea $C \neq C'$ este falsă, deci $C = C'$. Atunci $C - C'$ este polinomul nul, deci şi polinomul din dreapta este polinomul nul, deci $R = R'$.

Aşadar, $C' = C$ şi $R' = R$, ceea ce a fost de demonstrat.

Fiind date polinoamele $D(z)$ şi $I(z)$, există un singur polinom $C(z)$ şi un singur polinom $R(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea

$$D(z) = I(z)C(z) + R(z) \text{ şi gr. } R(z) < \text{gr.} I(z).$$

1.3.4. Schema lui Horner. În cazul cînd împărţitorul este un binom de forma $z - p$, împărţirea se poate face printr-un procedeu rapid.

Fie de făcut împărţirea

$$(a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5) : (z - p).$$

Cîtul va fi un polinom de gradul IV de forma $c_0z^4 + c_1z^3 + c_2z^2 + + c_3z + c_4$, iar restul va fi un polinom constant R. Trebuie să aflăm coeficienții c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 și R. Lucrarea începe astfel:

$$\begin{array}{l|l} a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + \dots + a_5 & z - p \\ \cline{2-2} -a_0z^5 + a_0pz^4 & a_0z^4 + \underbrace{(a_0p + a_1)}_{c_1}z^3 + \dots \\ \cline{1-1} \quad / \qquad \underbrace{(a_0p + a_1)}_{c_1}z^4 + a_2z^3 + \dots + a_5 & \end{array}$$

. . . .

Se constată că primul coeficient al cîtului este egal cu primul coeficient al deîmpărțitului, $c_0 = a_0$, iar coeficientul următor al cîtului este

$$c_1 = a_0p + a_1 = c_0p + a_1;$$

el se obține înmulțind primul coeficient al cîtului cu p și adăugind la produs pe a_1.

Acum primul rest parțial se scrie $c_1z^4 + a_2z^3 + \dots + a_5$ și lucrarea continuă ca și cum am avea de împărțit acest rest parțial prin $(z - p)$.

$$\begin{array}{l|l} c_1z^4 + a_2z^3 + \dots + a_5 & z - p \\ \cline{2-2} -c_1z^4 + c_1pz^3 & c_1z^3 + \underbrace{(c_1p + a_2)}_{c_2}z^2 + \dots \\ \cline{1-1} \quad / \qquad \underbrace{(c_1p + a_2)}_{c_2}z^3 + \dots + a_5 & \end{array}$$

. . . .

Se constată că coeficientul următor al cîtului este

$$c_2 = c_1p + a_2;$$

c_2 se obține din c_1 la fel cum s-a obținut c_1 din c_0, și anume: coeficientul precedent al cîtului se înmulțește cu p, și produsul se adună cu coeficientul următor al deîmpărțitului. În același fel se obține c_3 din c_2 ș.a.m.d. În general,

$$c_i = c_{i-1}p + a_i.$$

Ultimul coeficient al cîtului este $c_4 = c_3p + a_3$, și ultimul pas al împărțirii se prezintă astfel:

$$\begin{array}{l|l} c_4z + a_5 & z - p \\ \cline{2-2} -c_4z + c_4p & c_4 \\ \cline{1-1} \quad / \qquad c_4p + a_5 & \end{array}$$

Restul este $R(z) = c_4 p + a_5$. El se obține prin același procedeu ca și coeficienții cîtului.

În practică se procedează precum urmează. Fie de efectuat împărțirea $(2z^4 - 7z^3 + 8z - 5) : (z - 3)$.

Coeficienții deîmpărțitului se scriu în rîndul întîi (avînd grijă să se scrie și coeficientul lui z^2, care este 0), în rîndul al doilea, la dreapta, se scrie numărul 3 (din $z - 3$), apoi se procedează astfel:

2	−7	0	8	−5	
2	−1	−3	−1	−8	3

Sub coeficientul 2, se scrie același număr 2; $2 \cdot 3 + (-7) = -1$, sub (-7) se scrie (-1); $(-1) \cdot 3 + 0 = -3$, sub 0 se scrie -3; $-3 \cdot 3 + 8 = -1$, sub 8 se scrie (-1); în sfîrșit, $(-1) \cdot 3 - 5 = -8$, sub -5 se scrie -8. Cîtul și restul acestei împărțiri sînt:

$$C(z) = 2z^3 - z^2 - 3z - 1, \quad R(z) = -8.$$

1.3.5. Exemple. 1) Dacă împărțitorul este de forma $z + p$, el se pune sub forma $z + p = z - (-p)$. În schema de mai jos s-a făcut împărțirea $(z^3 - 3iz^2 + 4z + 1 - 2i) : (z + 2)$.

1	−3i	4	1 − 2i	
1	−2 − 3i	8 + 6i	−15 − 14i	−2

Cîtul și restul sînt: $C(z) = z^2 - (2 + 3i)z + 8 + 6i, \quad R(z) = -15 - 14i.$

2) Numărul p poate fi imaginar, adică un număr complex $a + bi$ în care $b \neq 0$, ca în cazul

$$[iz^3 - (2 + i)z^2 + 4z - 3 - i] : (z - 1 + i).$$

Împărțitorul este $z - (1 - i)$.

i	−2 − i	4	−3 − i	
i	−1	3 + i	1 − 3i	1 − i

(În acest caz, înmulțirile nu se mai fac în gînd.) Cîtul și restul sînt:

$$C(z) = iz^2 - z + 3 + i, \quad R(z) = 1 - 3i.$$

EXERCIȚII

OPERAȚII CU POLINOAME

1. Să se calculeze:

a) $[(1 + i)z^2 - 3z + (2 - \sqrt{3})i] + [(1 - i)z^2 - iz + i\sqrt{3}]$;

b) $[z^3 - (2 + i)z^2 - iz + 1 - i] - [(3 - i)z^2 + (1 - 2i)z - 2 + 3i]$.

2. Se dă polinomul

$$2z^3 + \sqrt{3}z^2 - 5z + 1$$

și se cere să se găsească un polinom care, adunat cu el, să dea polinomul nul.

3. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(z + 1 - i)(z - 3 + 2i)$;

b) $[z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - 3(2 + i\sqrt{3})](z - 2 + i\sqrt{3})$;

c) $[z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i][z^2 - (4 + i)z + 4 + 2i]$;

d) $[z^2 - (4 - i)z + 3 - i](z^2 - (7 + i)z + 4(3 + i)]$.

4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(1 + i)z + 1 - 2i = 0$; b) $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$;

c) $z^2 - 5z + 7 + i = 0$; d) $\frac{z}{z + i} + \frac{z + i}{z - i} = \frac{11}{3}$.

5. Să se dea un exemplu de două polinoame $P(z)$ și $Q(z)$ de același grad, astfel ca gradul sumei lor să fie; *a)* cu 1 mai mic decît gradul lor; *b)* cu 2 mai mic decît gradul lor.

6. Să se demonstreze că dacă produsul a două polinoame este de gradul zero (un polinom constant), fiecare dintre ele este de gradul zero.

7. Se dau: polinomul $P(z)$ de gradul m și polinomul nul P^*. Care este: a) gradul sumei lor?; b) gradul produsului lor?

8. Presupunem că propoziția $[ab = 0] \Rightarrow [a = 0$ sau $b = 0]$ n-ar fi adevărată. Atunci propoziția cu privire la gradul produsului a două polinoame (1.1.6) mai rămîne adevărată?

9. Se consideră numerele complexe $u = a + bi$, $v = c + di$. Să se găsească condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească numerele reale a, b, c, d, ca produsul $(z + u)(z + v)$ să fie un polinom cu coeficienți reali.

10. Să se demonstreze că $[\forall z, z \in C \quad az^2 + bz + c = 0] \Rightarrow [a = b = c = 0]$ dînd lui z valorile $z = 0$, $z = 1$ și $z = -1$.

Să se găsească pe o cale asemănătoare condiția ca polinomul $az^3 + bz^2 + cz + d$ să fie identic nul.

11. Se consideră un polinom de gradul n. Examinînd îndeaproape în ce măsură s-a folosit ipoteza teoremei de la 1.2.2. să se spună pentru cîte valori ale variabilei trebuie să se anuleze un polinom ca să putem conchide că el este polinomul nul?

12. Să se aplice procedeul de la 1.2.2 pentru a determina un polinom de gradul II, $P(z)$, care să se anuleze pentru $z = 1$, $z = 2$ și $z = 3$. Ce teoremă cu privire la sistemele de ecuații liniare se aplică aici?

13. Să se refacă demonstrația teoremei de la 1.2.4 pentru cazul a două polinoame de gradul IV.

14. Considerăm, polinoamele $A(z) = z^2 + 2z - 5$, $B(z) = 3z^2 + 5z - 11$. Produsul lor este $P(z) = 3z^4 + 11z^3 - 16z^2 - 47z + 55$.

Să se găsească toate polinoamele care iau pentru orice valoare a lui $z (z \in C$ sau $z \in R)$ aceeași valoare ca produsul $A(z)\ B(z)$. Ce teoremă se aplică aici?

15. Să se determine un polinom de gradul II, $P(z)$, care să îndeplinească condițiile: $P(1) = 9$, $P(2) = 17$, $P(-1) = 11$. Cîte soluții există?

16. Să se demonstreze că: a) dacă un polinom de gradul n ia valori reale pentru $n + 1$ valori reale ale lui x, toți coeficienții polinomului sînt reali; b) dacă un polinom de gradul n ia valori raționale pentru $n + 1$ valori raționale ale lui x, toți coeficienții polinomului sînt raționali.

17. a) Să se determine un polinom $P(z)$ de grad $\leqslant 2$ care să satisfacă identitatea:

$$\forall z, \ z \in C \qquad P(z) = P(1 - z).$$

Să se demonstreze că, dacă $P(z)$ și $Q(z)$ sînt două polinoame care îndeplinesc această condiție, suma lor îndeplinește de asemenea condiția.

b) Aceeași problemă în cazul unui polinom $P(z)$ de grad $\leqslant 3$. c) Generalizare.

18. În vorbirea obișnuită cuvîntul *identic* are sensul următor: două lucruri sînt identice dacă sînt unul și același lucru. De exemplu, autorul poeziei Luceafărul este identic cu poetul Mihai Eminescu. Acest cuvînt are același sens și în expresia *polinoame identice*? (Să se revadă și definiția egalității a două polinoame — 1.2.1. În cazul cînd răspunsul este afirmativ, de ce mai este necesară teorema de la 1.2.4?

19. Fie $\mathcal{E}$ mulțimea expresiilor algebrice întregi care conțin o singură variabilă z, și $\mathfrak{L}$ mulțimea funcțiilor polinomiale. Fie $f : \mathcal{E} \to \mathfrak{L}$ funcția care asociază fiecărei expresii $E \in \mathcal{E}$ funcția $P \in \mathfrak{L}$ dată de polinomul care se obține efectuînd

toate operațiile din E. a) Este funcția f surjectivă? injectivă?; b) Aceeași întrebare dacă $\mathcal{E}$ este mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali.

METODA COEFICIENȚILOR NEDETERMINAȚI

20. Să se determine a, b, c astfel ca să aibă loc identitatea:

$$x^2 + 2x - 7 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-1)(x-3).$$

21. Presupunem că nu cunoaștem formula de rezolvare a ecuației de gradul II. Pentru a rezolva ecuația $x^2 - 5x + 4 = 0$, de exemplu, judecăm astfel: Ecuația va fi rezolvată dacă vom reuși să o punem sub forma $(x-p)(x-q) = 0$, căci atunci rădăcinile ei vor fi p și q. Să se folosească metoda coeficienților nedeterminați pentru a determina p și q. De ce este această metodă ineficientă?

22. Pentru a dezvolta $(a+x)^n$ după puterile crescătoare ale lui x, se poate proceda astfel:

Se scrie $(a+x)^n = c_0a^n + c_1a^{n-1}x + c_2a^{n-2}x^2 + \ldots + c_{n-1}ax^{n-1} + c_nx^n$, coeficienții $c_0, c_1, \ldots$ fiind necunoscuți. Apoi se pune în ambii membri $x = 0$ și se află c_0; se derivează ambii membri ai identității, se pune $x = 0$ și se obține c_1; ș.a.m.d. Să se demonstreze în acest fel formula binomului.

ÎMPĂRȚIREA POLINOAMELOR

23. Să se efectueze:

a) $[2z^3 + (7-i)z^2 + 7z + 3 + i] : [z + 2 - i)$;

b) $[4z^3 + 12z^2 + (3-i)z - 9 + 6i] : (4z^2 - 8iz - 15 + 22i)$;

c) $[2z^4 + (1-2i)z^3 + (4-2i)z^2 + (1+i)\ z - 2i] : (z^2 - iz + 2)$.

24. Există un polinom $Q(z)$ astfel ca să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in \mathbb{C}\quad z^3 - 2z^2 + 6z + 3 = (z^2 + z + 1)Q(z)?$$

Se poate răspunde la această întrebare fără teorema de la 1.3.3.?

25. Să se efectueze împărțirea $(2x^4 - 5x^3 + 3x - 8) : (2x^2 - 3x + 5)$ a) direct; b) prin metoda coeficienților nedeterminați.

26. Să se determine a și b astfel ca polinomul $2z^4 - 3z^3 + az + b$ să fie divizibil prin polinomul $z^2 - 2z + 3$.

27. Să se determine restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $(x-a)(x-b)$. Aplicație numerică: $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$, $a = 2$, $b = 3$.

28. a) Polinoamele $A(z)$, $B(z)$, (Cz), $D(z)$ satisfac identitatea

$$A(z) = B(z)C(z) + D(z).$$

Avem dreptul să deducem de aici că $D(z)$ este restul împărțirii lui $A(z)$ prin $B(z)$?; b) Întrebare analogă în cazul unor numere naturale A, B, C, D.

29. a) Se poate împărţi polinomul $A(z)$ prin polinomul $B(z)$ dacă gr. $A(z) <$ $<$gr.$B(z)$?; b) Dar dacă $B(z)$ este polinomul nul, P^*?; c) Este situaţia analogă la împărţirea numerelor naturale?

30. a) Să se compare definiţia împărţirii polinoamelor cu definiţia împărţirii numerelor naturale. În ce constă deosebirea:

b) Fie $C(z)$ şi $R(z)$ cîtul şi restul împărţirii polinomului $D(z)$ prin polinomul $I(z)$, amîndouă cu coeficienţi reali. Dacă în identitatea prin care se defineşte împărţirea dăm lui z o valoare oarecare $z = a$, obţinem relaţia numerică $D(a) =$ $= I(a)C(a) + R(a)$. Se poate spune că $R(a)$ este restul împărţirii lui $D(a)$ prin $I(a)$?

c) Se consideră polinoamele

$$A(x) = x^2 - 5x + 10, \quad B(x) = x - 2.$$

Fie $C(x)$ şi $R(x)$ cîtul şi restul împărţirii lui $A(x)$ prin $B(x)$. Între ce limite poate varia x pentru ca numărul $R(x)$ să fie restul împărţirii numărului $A(x)$ prin numărul $B(x)$?

31. a) $P(x)$ şi $Q(x)$ fiind polinoame cu coeficienţi întregi, care dintre afirmaţiile următoare este adevărată?

1) Suma lor, 2) diferenţa lor, 3) produsul lor, este un polinom cu coeficienţi întregi, 4) cîtul şi restul împărţirii lui $P(x)$ prin $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi întregi.

b) Aceeaşi întrebare cînd $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi raţionali, iar în afirmaţiile 1) —4 cuvintele *coeficienţi întregi* se înlocuiesc prin cuvintele *coeficienţi raţionali.*

c) Aceeaşi întrebare cînd $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi complecşi iar în afirmaţiile 1) —4) cuvintele *coeficienţi întregi* se înlocuiesc prin cuvintele *coeficienţi complecşi.*

În cazurile în care afirmaţia este falsă, se va da cîte un exemplu.

32. Să se demonstreze că, la împărţirea polinoamelor, cîtul şi restul sînt unice, făcînd împărţirea prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi. (Se poate lua cazul $(a_0z^5 + a_1z^4 + \dots + a_5) : (b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3)$.)

33. Să se efectueze prin schema lui Horner, împărţirile:

a) $(2z^5 - 7z^4 + 6z^3 - 8z^2 + 9z + 10) : (z - 2)$;

b) $(4z^4 + 5z^3 - 12z - 40) : \left(z + \frac{1}{2}\right)$;

c) $(z^5 + \sqrt{3}\, z^4 - 5z^3 + 2\sqrt{3}\, z^2 - 6z - 4\sqrt{3}) : (z - \sqrt{3})$;

d) $(4z^5 - 3z^4 + 5z^3 + z^2 + 3z - 2) : (z - i)$;

e) $[z^4 + (1 + i)z^3 + iz^2 + (-9 + 7i)z - 1 + 3i] : (z - 2 + i)$.

34. Să se efectueze calculele următoare în clasele de resturi indicate.

Prin $a : b$, unde $a, b, \in Z_n$, se înțelege aici mulțimea elementelor din Z_n care, înmulțite cu b, dau a, adică mulțimea soluțiilor ecuației $ax = b$. Exemple: În Z_7, $\hat{3} : \hat{4} = \hat{6}$; în Z_{20}, $\hat{2} : \hat{7} = \hat{6}$, $\hat{8} : \hat{4} = \{\hat{2}, \hat{7}, \widehat{12}, \widehat{17}\}$, $\hat{3} : \hat{5} = \varnothing$.

a) în Z_7: $\hat{3} + \hat{5}$; $\hat{5} - \hat{2}$; $\hat{3} - \hat{6}$; $\hat{2} - \hat{3}$; $\hat{4} \cdot \hat{6}$; $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{3} : \hat{5}$; $\hat{1} : \hat{2}$;

b) în Z_6: $\hat{3} + \hat{5}$; $\hat{1} - \hat{2}$; $\hat{2} - \hat{3}$; $\hat{2} - \hat{4}$; $\hat{3} \cdot \hat{5}$; $\hat{3} : \hat{5}$; $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{4} : \hat{2}$;

c) în Z_{10}: $\hat{5} : \hat{3}$; $\hat{8} : \hat{3}$; $\hat{2} : \hat{4}$; $\hat{4} : \hat{4}$; $\hat{2} : \hat{8}$; $\hat{8} : \hat{4}$; $\hat{5} : \hat{5}$; $\hat{6} : \hat{8}$.

35. a) Scăderea $x - y$ este posibilă oricare ar fi elementele x și y din Z_4? b) Din Z_5? c) Împărțirea $x : y$ este posibilă oricare ar fi x și y din Z_5? d) Dar dacă x și y aparțin lui Z_6? e) Lui Z_{12}?

36. Un element $x \neq 0$ se numește divizor al lui zero, dacă există un element $y \neq 0$ astfel încît $x\, y = 0$.

Exemple: În Z_{15}, $\hat{3}$ și $\hat{5}$ sînt divizori ai lui zero; în Z_{24}, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{6}$ și $\hat{8}$.

a) Să se găsească toți divizorii lui zero din Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_{12}. b) În care dintre aceste mulțimi este adevărată propoziția: un produs de doi factori este egal cu zero numai dacă măcar unul din factori este zero?

37. Să se efectueze înmulțirile:

a) $(\hat{2}x^2 - \hat{3}x + \hat{4})(\hat{3}x + \hat{2})$... coeficienții din Z_6; b) $(\hat{5}x^2 + \hat{3}x + \hat{1})(\hat{2}x^2 + \hat{3})$... coeficienții din Z_{10}.

De ce nu se adeverește propoziția cu privire la gradul produsului a două polinoame (1.1.6)?

38. *a)* Se consideră polinomul $P(x) = x^3 + \hat{3}x^2 + \hat{2}\, x$ cu coeficienții din Z_3, în care $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$. Să se verifice că $P(x)$ este identic nul. De ce nu se verifică teorema de la 1.2.2?. *b)* Aceeași chestiune în cazul polinomului $P(x) = \hat{3}x^6 + x^5 + \hat{2}x^2 + \hat{4}x$ cu coeficienți din Z_5, $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$.; c) Aceeași chestiune în cazul polinoamelor $P(x) = \hat{4}x^3 + \hat{2}x$ și $Q(x) = \hat{4}x^7 + x^6 + \hat{5}x^2 + \hat{2}x$, cu coeficienți în Z_6, $x \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

* Pentru a rezolva aceste probleme, trebuie studiat 5.1.12 care se poate înțelege fără o pregătire prealabilă. Se vor alcătui tabelele de adunare și de înmulțire pentru clasele de resturi modulo 2, 3, 4, 5, 6, 10 și 12. Notăm cu Z_n mulțimea claselor de resturi modulo n.

CAPITOLUL II

ECUAȚII ALGEBRICE CU COEFICIENȚI COMPLECȘI

2.0 INTRODUCERE

O ecuație algebrică cu o singură necunoscută este o ecuație de forma

$$P(z) = 0,$$

unde $P(z)$ este un polinom. Dacă nu se face mențiunea contrară, se înțelege că $P(z) \neq P^*$.

Exemple: $z^3 - 2z^2 - 11z + 12 = 0$, $\sqrt{3}\, z^4 + 5z^3 - \pi z + 2 = 0$,

$$2z^5 + (3 + i)z^4 - (\sqrt{2} - i)z^3 + \frac{4}{7} z^2 - 2iz + 1 - i = 0$$

sînt ecuații algebrice. În schimb,

$$2^x = x^2 - 1, \quad \log x = 1 - x, \quad x - 2 \sin x = 0$$

nu sînt ecuații algebrice, sînt ecuații *transcendente*.

Gradul polinomului din partea stîngă a unei ecuații algebrice se numește gradul ecuației.

Dacă $P(a) = 0$, numărul a se numește *soluție* sau *rădăcină* a ecuației $P(z) = 0$; se mai spune că este o rădăcină a polinomului $P(z)$.

În acest capitol vom trata ecuații algebrice cu coeficienți complecși, în care necunoscuta ia valori complexe.

În algebra elementară se învață cum se rezolvă ecuațiile algebrice de gradul I și II, de forma $ax + b = 0$ respectiv $ax^2 + bx + c = 0$, și unele ecuații particulare de grad superior (ecuații bipătrate, binome etc.).

Rezolvarea ecuațiilor algebrice de grad superior este una din cele mai importante și mai fecunde probleme ale matematicii și, într-o anumită perioadă, a fost obiectul principal al algebrei.

Încă din antichitate matematicienii știau să rezolve ecuații de gradul II, printr-o metodă apropiată de cea care se folosește astăzi.

În secolul al XVI-lea, matematicienii italieni (Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari) au găsit formule de rezolvare pentru ecuațiile de gradul III și IV. De atunci și pînă la mijlocul secolului al XIX-lea, cei mai de seamă matematicieni ai lumii au făcut eforturi mari să găsească formule de rezolvare pentru ecuații de grad mai mare decît patru, dar aceste eforturi au fost zadarnice. Problema a fost rezolvată, în sens negativ, abia în prima jumătate a secolului al XIX-lea, printr-o lucrare a matematicianului norvegian H. Abel, care a murit la vîrsta de numai 27 de ani. El a demonstrat că, în general, *o ecuație algebrică de grad mai mare decît patru nu poate fi rezolvată prin radicali*. Cu alte cuvinte, nu există nici o expresie cu radicali formată cu coeficienții ecuației — și cu atît mai puțin va exista o expresie rațională — care să fie o rădăcină a ecuației.

Cercetările care s-au făcut în legătură cu teoria ecuațiilor algebrice au impus un studiu adîncit al polinoamelor, care a dus la rezultate importante cu privire la rădăcinile ecuațiilor algebrice de orice grad. Astfel, fără a putea rezolva ecuația $P(x) = 0$ unde $P(x)$ este un polinom oarecare, s-a putut stabili cîte rădăcini are ecuația, unele relații între coeficienții polinomului $P(x)$ și rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ ș.a.m.d.

În acest capitol se tratează unele dintre aceste proprietăți. În matematica modernă ele se studiază într-un cadru foarte general. Aici vom considera cazul polinoamelor cu coeficienți complecși, în care variabila ia valori complexe.

Un rezultat fundamental care stabilește o legătură între teoria polinoamelor și rădăcinile ecuațiilor algebrice este legat de divizibilitatea polinoamelor și constă în teorema lui Bézout. De aceea începem cu această teoremă.

2.1. TEOREMA LUI BÉZOUT

2.1.1. Divizibilitatea polinoamelor. Considerăm, de exemplu, polinoamele

$$A(z) = z^3 - z^2 - z - 2 \quad \text{și} \quad B(z) = z - 2.$$

Împărţirea $A(z) : B(z)$ dă cîtul $C(z) = z^2 + z + 1$ şi ca rest polinomul nul; are loc identitatea

$$A(z) = B(z)C(z)$$

care arată că există un polinom, $C(z) = z^2 + z + 1$, care, înmulţit cu $B(z)$, dă $A(z)$. Se spune că polinomul $A(z) = z^3 - z^2 - z - 2$ este *divizibil* prin polinomul $B(z) = z - 2$.

Se spune că polinomul A(z) este divizibil prin polinomul B(z), dacă există un polinom C(z) astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C,\ A(z) = B(z)C(z).$$

Pentru a decide dacă un polinom $A(z)$ este divizibil printr-un polinom $B(z)$, se face împărţirea $A(z) : B(z)$. Dacă se obţine ca rest polinomul nul, răspunsul este afirmativ; dar dacă se obţine un alt rest, de exemplu $3z + 5$? Atunci răspunsul este negativ, căci, dacă ar exista un polinom $C(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea $A(z) = B(z)C(z)$, adică $A(z) = B(z)C(z) + P^*$, restul împărţirii fiind unic (1.33), ar urma că $P^* = 3z + 5$ — ceea ce nu este adevărat. Aşadar:

Un polinom A(z) este divizibil printr-un polinom B(z) dacă şi numai dacă împărţirea A(z): B(z) dă ca rest polinomul nul.

2.1.2. **Observare.** Relaţia de divizibilitate este o relaţie între polinoame, nu între funcţiile-polinom corespunzătoare. Aici, simbolurile $A(z)$, $B(z)$ etc. reprezintă polinoamele, ca expresii algebrice, nu valorile funcţiilor corespunzătoare (v. 1.1.9). Dacă $A(z)$, $B(z)$ şi $C(z)$ ar reprezenta numere, relaţia

$$A(z) = B(z)C(z)$$

care apare în definiţia divizibilităţii polinoamelor n-ar avea de multe ori nici un sens. Astfel, în cazul exemplului de mai sus relaţia este

$$z^3 - z^2 - z - 2 = (z - 2)\ (z^2 + z + 1).$$

Pentru $z = \frac{1}{2}$, ea devine $\frac{21}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4}$ şi arată că $\frac{21}{8}$ este „divizibil" prin $\frac{3}{2}$. Aceasta n-are nici un sens, căci orice fracţie este divizibilă prin orice fracţie (diferită de zero).

2.1.3. **Teorema lui Bézout.** a) Fie $P(z)$ un polinom şi R restul împărţirii lui $P(z)$ printr-un polinom de forma $z - a$. Împărţitorul

fiind de gradul I, restul R va fi de gradul zero (o constantă, eventual zero).



Valoarea polinomului P(z) pentru $z = a$ este egală cu restul împărţirii polinomului P(z) prin $z - a$.

$$P(a) = R.$$

Pentru a demonstra* această teoremă, pornim de la identitatea

$$\forall z, z \in C \qquad P(z) = (z - a)\ C(z) + R.$$

Dacă înlocuim în partea dreaptă a acestei identităţi z prin a, obţinem $(a - a)C(a) + R = 0 \cdot C(a) + R = 0 + R = R$. Deci,

$$P(a) = R,$$

ceea ce a fost de demonstrat.

b) De aici rezultă imediat că dacă $R = 0$, $P(a) = 0$ şi reciproc.



Un polinom P(z) este divizibil prin $z - a$ dacă şi numai dacă numărul a este o rădăcină a ecuaţiei $P(z) = 0$.

$$[P(z) \text{ divizibil prin } z - a] \Leftrightarrow [P(a) = 0].$$

Aceste două propoziţii, dintre care a doua este o consecinţă a primei, dar cu mult mai importantă, formează teorema lui Bézout.

• Aplicaţii

2.1.4. Legătura dintre divizibilitatea polinoamelor şi rădăcinile ecuaţiilor algebrice. Teorema lui Bézout (partea a doua) arată că propoziţiile:

Numărul a este o rădăcină a ecuaţiei algebrice $P(z) = 0$.	Polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - a$.

sînt echivalente: dacă una din ele este adevărată, cealaltă este de

---

* Se recomandă să se facă întîi raţionamentul pe un caz particular. De exemplu, împărţirea $(z^3 - 8z^2 + 5z + 19) : (z - 2)$ dă cîtul $z^2 - 6z - 7$ şi restul 5. Folosind identitatea

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 5z + 19 = (z - 2)(z^2 - 6z - 7) + 5$$

ne propunem să calculăm $P(2)$. Rezultatul se obţine imediat dacă înlocuirea se face în partea dreaptă.

asemenea adevărată. Datorită acestui fapt, din studiul divizorilor de forma $z - a$ ai polinoamelor se pot trage concluzii cu privire la rădăcinile unei ecuații algebrice (v. 2.2.4.) și, invers, cunoscînd rădăcinile unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ se cunosc divizorii de forma $z - a$ ai polinomului $P(z)$. În special dacă se cunoaște o rădăcină a unei ecuații algebrice, se poate coborî gradul ecuației.

Exemplu. *Să se rezolve ecuația*

$$P(z) = 3z^3 - 11z^2 + 8z - 6 = 0$$

știind că admite rădăcina $z = 3$.

Știm că polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - 3$. Împărțirea dă cîtul $3z^2 - 2z + 2$, deci ecuația se poate scrie sub forma

$$(z - 3)(3z^2 - 2z + 2) = 0$$

și se descompune în

$$z - 3 = 0 \text{ și } 3z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Prima ecuație dă rădăcina cunoscută $z = 3$; a rămas să rezolvăm ecuația $3z^2 - 2z + 2 = 0$, al cărei grad este cu 1 mai mic decît al ecuației propuse. Rădăcinile ei sînt $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3}$. Rădăcinile ecuației propuse sînt: 3 și $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3}$.

2.1.5. Dacă a este o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$, polinomul $P(z)$ este divizibil prin $z - a$. Fie $C(z)$ cîtul împărțirii lui $P(z)$ prin $z - a$. Atunci

$$\forall z, z \in C \quad P(z) = (z - a)C(z).$$

Fie b o altă rădăcină a aceleiași ecuații. Înlocuind în ultima identitate z prin b obținem

$$P(b) = (b - a)\,C(b).$$

Deoarece $P(b) = 0$, expresia din dreapta este egală cu zero. Dar $b - a \neq 0$, deci $C(b) = 0$, b este o rădăcină a ecuației $C(z) = 0$, deci $C(z)$ este divizibil prin $z - b$.

Dacă a și b sînt două rădăcini ale ecuației algebrice $P(z) = 0$ și $P(z) : (z - a) = C(z)$, atunci $C(z)$ este divizibil prin $z - b$.

Dacă c este o a treia rădăcină a ecuației $P(z) = 0$ și $C(z) : (z - c) = D(z)$, atunci $D(z)$ este divizibil prin $(z - c)$ ş.a.m.d.

Exemplu. *Să se rezolve ecuația*

$$P(z) = 3z^4 + 4z^3 + 3z - 10 = 0$$

știind că admite rădăcinile 1 și -2.

$P(z)$ este divizibil prin $z - 1$, iar cîtul este divizibil $z + 2$. Lucrările se așază astfel:

3	4	0	3	−10	
3	7	7	10	0	1
3	1	5	0		−2

Se împarte polinomul dat prin $z - 1$. În rîndul al doilea apar coeficienții cîtului $P(z):(z - 1)$. Continuăm lucrarea imediat, folosind rîndul al doilea ca deîmpărțit și împărțind prin $z + 2$. În rîndul al treilea apar coeficienții noului cît, $[P(z):$ $:(z - 1)] : (z + 2) = P(z) : [(z - 1)\ (z + 2)]$. Acest cît este $3z^2 + z + 5$. Acum ecuația se scrie

$$P(z) = (z - 1)\ (z + 2)\ (3z^2 + z + 5) = 0$$

și se descompune în

$$z - 1 = 0,\ z + 2 = 0,\ 3z^2 + z + 5 = 0.$$

Primele două ecuații dau rădăcinile 1 și -2, cunoscute dinainte, iar ecuația a treia dă $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{59}}{6}$.

Rădăcinile ecuației propuse sînt: 1, -2 și $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{59}}{6}$.

Cînd se cunoaște o rădăcină a unei ecuații, sau două, sau trei... rezolvarea ei se reduce la rezolvarea unei alte ecuații, al cărei grad este cu 1, 2, 3, ... mai mic decît gradul ecuației inițiale, ceea ce ne permite uneori să rezolvăm ecuația.

2.1.6. **Divizibilitatea prin** $(z - a)$ **și** $(z - b)$. Fie a și b două rădăcini ale ecuației algebrice $P(z) = 0$. Atunci $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)$ și $(z - b)$. $P(z)$ fiind divizibil prin $z - a$, există un polinom $C(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea

$$P(z) = (z - a)C(z).$$

Am arătat (2.1.5.) că $C(z)$ este divizibil prin $z - b$, deci există un polinom $D(z)$ astfel încît să aibă loc identitatea

$$C(z) = (z - b)D(z).$$

Înlocuind în ultima identitate $C(z)$ prin $(z - b)D(z)$, obținem

$$P(z) = [(z - a)(z - b)]D(z),$$

ceea ce înseamnă că $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)(z - b)$.

Dacă un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z-a$ şi $z-b$, el este divizibil prin $(z-a)(z-b)$.

Teorema se extinde uşor pentru cazul cînd polinomul este divizibil prin 3, 4,... factori de această formă.

Exemplu. Ecuaţia

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 17z - 10 = 0$$

admite ca rădăcini numerele 1 şi 2, deci $P(z)$ este divizibil prin $z-1$ şi $z-2$. Rezultă că $P(z)$ este divizibil prin $(z-1)(z-2)$, adică prin z^2-3z+2 — ceea ce se poate verifica, făcînd împărţirea.

2.1.7. Aflarea valorii unui polinom prin schema lui Horner. Tot teorema lui Bézout (partea întîi) ne arată că, pentru a afla valoarea $P(a)$ a unui polinom $P(z)$ pentru o valoare $z = a$ a variabilei, putem calcula restul R al împărţirii $P(z):(z-a)$, căci $P(a) = R$. Restul se află foarte uşor dacă se foloseşte schema lui Horner.

Astfel, în primul exemplu de la 1.3.5 am aflat, printr-o împărţire, valoarea polinomului $P(z) = z^3 - 3iz^2 + 4z + 1 - 2i$ pentru $z = -2$:

$$P(-2) = -15 - 14i.$$

În exemplul al doilea am aflat pe aceeaşi cale valoarea polinomului $P(z) = iz^3 - (2+i)z^2 + 4z - 3 - i$ pentru $z = 1 - i$:

$$P(1-i) = 1 - 3i.$$

2.2. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI LINIARI. NUMĂRUL RĂDĂCINILOR UNEI ECUAŢII ALGEBRICE

2.2.1. Soluţiile ecuaţiilor algebrice în diferite sisteme numerice

1. În mulţimea numerelor naturale, ecuaţia

$$a + x = b, \qquad a, b \in N \tag{1}$$

admite o soluţie numai dacă $a < b$. Exemplu: $x+3=5$, contra exemplu:

$x + 3 = 1$. Numai după ce au fost introduse numerele întregi negative și s-au definit operațiile în Z, orice ecuație de forma (1) în care a, $b \in Z$ are o soluție, $x = b - a$.

2. În mulțimea numerelor întregi, ecuația

$$ax = b, \quad a, b \in Z \tag{2}$$

nu admite totdeauna o soluție. Exemplu: $3x = 12$, contraexemplu: $3x = 11$. Numai după ce s-au introdus numerele raționale și s-au definit operațiile cu aceste numere, orice ecuație de forma (2) în care $a, b \in Q$, $a \neq 0$ admite o soluție, $x = \frac{b}{a}$.

3. Cînd se trece la ecuația de gradul II, apare necesitatea unor noi lărgiri ale noțiunii de număr, căci ecuația

$$x^2 = a, \quad a \in Q \tag{3}$$

nu are totdeauna o soluție în Q. Exemplu: $x^2 = 9$, contraexemplu: $x^2 = 2$, $x^2 = -9$. Numai în urma introducerii numerelor iraționale de forma $\sqrt{a}$, $a \geqslant 0$ și, mai general, după ce s-a construit mulțimea R a numerelor reale, orice ecuație de forma (3) în care $a \geqslant 0$ are o soluție, chiar două: $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$.

Aceasta cîtă vreme $a \geqslant 0$, Cînd $a < 0$ apare o nouă imposibilitate. Această imposibilitate se înlătură prin introducerea numerelor complexe, de forma $a + bi$. În mulțimea C a numerelor complexe, orice ecuație de forma (3) cu $a \in C$ are o soluție. De exemplu, $x^2 = -9, x = \pm 3i$. Mai mult, după cum s-a arătat în algebra elementară, în C orice ecuație de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in C$, $a \neq 0$, are două soluții, date de formula cunoscută.

4. Cînd se trece la ecuații de grad > 2, cum ar fi:

$$x^3 - 3x + 5 = 0, \quad x^4 - 3x^2 + \sqrt{3}\, x + i = 0,$$

se pune problema următoare: sîntem siguri că aceste ecuații au măcar cîte o soluție? Trecerea de la ecuația de gradul I la cea de gradul II a impus o lărgire a noțiunii de număr, chiar două: nu cumva trecerea la ecuația de gradul III va impune o altă lărgire a noțiunii de număr, trecerea la ecuația de gradul IV încă una, ș.a.m.d.?

Răspunsul îl dă teorema următoare:

2.2.2. **Teorema fundamentală a algebrei.**

Orice ecuaţie algebrică

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0,$$
$$a_0,\ a_1, \dots,\ a_n \in C, \quad n > 0$$

are cel puţin o rădăcină în C.

Simbolic,

$$\forall P(z),\ \exists z_1,\ z_1 \in C \text{ astfel încît } P(z_1) = 0.$$

Această teoremă se numeşte *teorema fundamentală a algebrei* sau *teorema lui Gauss*, unul dintre cei mai mari matematicieni germani din sec. XIX, sau *teorema lui d'Alembert*. Nu vom da demonstraţia ei.

Teorema fundamentală a algebrei arată că procesul de lărgire a noţiunii de număr astfel ca diferitele ecuaţii algebrice să aibă soluţii, se termină o dată cu introducerea numerelor complexe. Se spune că corpul numerelor complexe este *algebric închis*.

2.2.3. **Observare.** Am presupus că ecuaţia are coeficienţi complecşi. Aceasta nu exclude ca coeficienţii să fie reali, raţionali, întregi sau chiar numere naturale, căci $Z \subset Q \subset R \subset C$. De asemenea, rădăcina poate fi reală, raţională ş.a.m.d., dar existenţa ei este asigurată numai dacă se admit ca soluţii şi numere complexe.

2.2.4. **Descompunerea polinoamelor în factori liniari.** Între rădăcinile unei ecuaţii algebrice $P(z) = 0$ şi descompunerea polinomului $P(z)$ există o legătură foarte strînsă, de aceea, pentru a putea continua studiul ecuaţiilor algebrice, trebuie să ne ocupăm de descompunerea polinoamelor în factori liniari, adică în factori de forma $z - a$.

Ecuaţia de gradul I, $a_0z + a_1 = 0$ are o singură rădăcină, $z_1 = -\frac{a_1}{a_0}$ şi are loc identitatea

$$\forall z,\ z \in C \quad a_0z + a_1 = a_0\left(z + \frac{a_1}{a_0}\right) = a_0(z - z_1).$$

Ecuaţia de gradul II,

$$a_0z^2 + a_1z + a_2 = 0,$$

are două rădăcini z_1 şi z_2 şi, după cum se ştie,

$$\forall z,\ z \in C \quad a_0z^2 + a_1z + a_2 = a_0(z - z_1)(z - z_2).$$

Relații analoge există oricare ar fi gradul ecuației. Considerăm, de exemplu, un polinom de gradul V

$$P_5(z) = a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5.$$

Teorema fundamentală a algebrei ne spune că ecuația $P_5(z) = 0$ are cel puțin o rădăcină. Să o numim z_1, $z_1 \in C$. Pe baza teoremei lui Bézout putem afirma că $P(z)$ este divizibil prin $(z - z_1)$. Cîtul va fi un polinom de gradul IV, $P_4(z)$ și va avea loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \quad P_5(z) = (z - z_1)P_4(z).$$

Tot pe baza teoremei fundamentale a algebrei, putem spune că ecuația $P_4(z) = 0$ admite cel puțin o rădăcină, s-o notăm cu z_2, diferită de z_1 sau egală cu z_1. Fie $P_3(z)$ cîtul împărțirii lui $P_4(z)$ prin $z - z_2$. $P_3(z)$ va fi de gradul III și vom avea

$$\forall z, \ z \in C \quad P_4(z) = (z - z_2)P_3(z).$$

Repetînd raționamentul, se ajunge la concluzia că există un număr complex z_3 și un polinom $P_2(z)$ de gradul II astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \quad P_3(z) = (z - z_3)P_2(z);$$

există un număr complex z_4 și un polinom $P_1(z)$ de gradul I, astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \quad P_2(z) = (z - z_4)P_1(z);$$

în sfîrșit există un număr complex z_5 și un polinom $P_0(z)$, care se reduce la o constantă, s-o notăm cu A, astfel încît să aibă loc identitatea

$$\forall z, \ z \in C \quad P_1(z) = (z - z_5)A.$$

Pentru a determina factorul A observăm că, dacă împărțim un polinom $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ prin $(z - z_1)$, primul termen al cîtului este a_0z^{n-1}; deci primul coeficient al cîtului este același ca al deîmpărțitului. Rezultă că primul coeficient al polinomului $P_4(z)$ este același cu al lui $P_5(z)$ adică a_0. Din același motiv, primul coeficient al lui $P_3(z)$ este același cu al lui $P_4(z)$ adică a_0 ș.a.m.d. Primul coeficient se păstrează de-a lungul tuturor împărțirilor. Deci, $A = a_0$.

Înmulţim aceste identităţi (şi înlocuim A prin a_0). Obţinem:

$$P_5P_4P_3P_2P_1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)\,P_4P_3P_2P_1Pa_0$$

sau, simplificînd* cu $P_4P_3P_2P_1$,

$$\forall z,\ z \in C \quad P_5(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5).$$

Acelaşi raţionament se poate face oricare ar fi gradul polinomului. În cazul general, al polinomului de gradul n, $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, se obţine identitatea:

$$\forall z,\ z \in C \quad a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$



Orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari, diferiţi sau egali.

Se face abstracţie de factorul constant a_0. Unii dintre factorii $z - z_1$, $z - z_2$,... pot fi egali, căci se poate întîmpla ca unele dintre numerele z_1, z_2,... dintre care primul este o rădăcină a ecuaţiei $P_n(z) = 0$, al doilea, a ecuaţiei $P_n(z) : (z - z_1) = 0$ ş.a.m.d. să fie egali.

Această descompunere este unică (v. 2.2.7).

2.2.5. **Factori egali.** Cînd există factori egali, apar în descompunerea polinomului puteri ale unor binoame, ca $(z - z_1)^2$, $(z - z_2)^3$ etc.

În general, descompunerea unui polinom în factori liniari este de forma:

$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}\ldots(z - z_r)^{k_r}$, $k_1, k_2, \ldots, k_r \in N$, unde numerele $z_1, z_2, \ldots, z_r$ sînt diferite unul de altul, şi

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

De exemplu:

$$P(z) = z^6 - 12z^5 + 57z^4 - 138z^3 + 180z^2 - 120z + 32 = (z - 4)(z - 1)^2(z - 2)^3,$$

după cum se poate verifica efectuînd calculele din partea dreaptă.

În acest caz, $a_0 = 1$, $z_1 = 4$, $k_1 = 1$, $z_2 = 1$, $k_2 = 2$, $z_3 = 2$, $k_3 = 3$.

---

* Avem dreptul de a face această simplificare. În adevăr, fie A, B, C trei polinoame între care există relaţia $AB = AC$, A fiind diferit de polinomul nul. Împărţind ambii membri prin A (ceea ce este posibil, căci AB este divizibil prin A şi cîtul este unic de asemenea şi AC), obţinem $A = C$. Aşadar $AB = AC \Rightarrow B = C$, ceea ce înseamnă că avem dreptul să simplificăm identitatea $AB = AC$ prin A.

2.2.6. Observare. Descompunerea polinoamelor în factori liniari este analogă cu descompunerea numerelor naturale în factori primi. Rolul factorilor primi îl joacă aici factorii liniari, de forma $z - a$. Trebuie însă menționat că această analogie există numai dacă se admit și factori liniari $z - a$ în care a este un număr complex și descompunerea nu este totdeauna posibilă dacă se cere ca a să fie real. De exemplu, polinomul $z^2 + 1$ nu se poate descompune în factori liniari reali, dar acest lucru este posibil în complex: $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$.

2.2.7. Unicitatea descompunerii. Vom demonstra acum că descompunerea unui polinom în factori liniari se poate face numai într-un singur fel. Vom face demonstrația pe un caz numeric.

Am văzut mai sus că descompunerea polinomului

$$P(z) = z^6 - 12z^5 + 57z^4 - 138z^3 + 180z^2 - 120z + 32$$

este

$$P(z) = (z - 2)^3(z - 1)^2(z - 4).$$

Să presupunem că ar exista o altă descompunere a aceluiași polinom în factori liniari,

$$P(z) = k(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f).$$

Ar urma să aibă loc identitatea

$$k(z - a)(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 2)^3(z - 1)^2(z - 4). \quad (1)$$

Pentru $z = 2$, partea dreaptă se anulează, căci factorul $z - 2$ se anulează. Rezultă că și partea stîngă a identității se anulează, ceea ce este posibil numai dacă măcar unul dintre binoamele $z - a$, $z - b$ etc. se anulează pentru $z = 2$ (căci $k \neq 0$). Putem admite că factorul $z - a$ se anulează. Cu aceasta generalitatea demonstrației nu se restrînge, căci, de vreme ce unul dintre factorii din stînga se anulează pentru $z = 2$, n-avem decît să notăm cu a termenul al doilea al acelui binom. Din $2 - a = 0$ rezultă că

$$a = 2.$$

Înlocuim în (1) a prin 2, simplificăm* prin $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 2)^2(z - 1)^2(z - 4). \quad (2)$$

Repetăm raționamentul, conchidem că

$$b = 2,$$

înlocuim b prin 2, simplificăm prin $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - c)(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 2)(z - 1)^2(z - 4). \quad (3)$$

Facem același raționament, ajungem la concluzia că

$$c = 2,$$

înlocuim în (3) c prin 2, simplificăm cu $z - 2$ și obținem identitatea

$$k(z - d)(z - e)(z - f) = (z - 1)^2(z - 4). \quad (4)$$

---

* v. nota de la 2.2.4.

Acum observăm că partea dreaptă se anulează pentru $z = 1$. Raționînd ca în cazul identității (2), ajungem la concluzia că

$$d = 1, \; e = 1.$$

Înlocuim în (4) d și e prin 1, simplificăm prin $(z - 1)^2$ și obținem identitatea

$$k(z - f) = z - 4, \qquad \text{adică} \qquad kz - kf = z - 4,$$

care ne dă, pe baza condiției ca două polinoame să fie identice,

$$k = 1, \quad f = 4.$$

Am demonstrat că $a = b = c = 2$, $d = e = 1$, $f = 4$, $k = 1$. Deci descompunerea a doua este aceeași cu prima.

Factorii liniari care au apărut sînt de forma $z - p$ (coeficientul lui z este 1). Astfel de factori se numesc factori liniari *normalizați*, spre deosebire de factorii liniari obișnuiți. De exemplu, $2z - 3$ nu este normalizat, $z - \frac{3}{2}$ este normalizat.

Putem deci enunța:

Descompunerea unui polinom în factori liniari normalizați este unică

Numai pe baza acestei teoreme se poate vorbi de descompunerea (articulat), nu de o descompunere a unui polinom în factori liniari.

Subliniem că, dacă nu se cere ca factorii liniari să fie normalizați, descompunerea nu este unică. De exemplu

$$6z^2 - 5z + 1 = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right) = 3(2z - 1)\left(z - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(3z - 1) = (2z - 1)(3z - 1) = \frac{1}{10}(10z - 5)(6z - 2) = \ldots$$

2.2.8. Numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice. Din descompunerea polinoamelor în factori liniari, vom deduce o teoremă importantă cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice.

Considerăm o ecuație algebrică de gradul n

$$P(z) = 0.$$

Știm că polinomul poate fi descompus în n factori liniari,

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$$

unde a_0, coeficientul lui z^n, este diferit de zero, iar unele dintre numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pot fi egale între ele.

a) Vom presupune întîi că factorii liniari sînt diferiţi.

Dacă înlocuim aici z prin z_1, factorul $z - z_1$ se anulează, deci $P(z_1) = 0$. La fel se arată că $P(z_2) = 0, \ldots, P(z_n) = 0$, deci ecuaţia $P(z) = 0$ are rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dacă punem în locul lui z un număr α diferit de $z_1, z_2, \ldots, z_n$, toţi factorii $\alpha - z_1, \alpha - z_2, \ldots, \alpha - z_n$ vor fi diferiţi de zero, a_0 este diferit de zero, deci produsul din dreapta este diferit de zero, deci $P(\alpha) \neq 0$, deci α nu este rădăcină a ecuaţiei $P(z) = 0$. Aceasta înseamnă că ecuaţia $P_n(z) = 0$ nu admite ca rădăcină nici un număr diferit de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.*

Am obţinut un prim rezultat: *o ecuaţie algebrică de gradul n are cel mult n rădăcini*. (v. 1.2.3, obs. 1.)

b) Acest rezultat nu este destul de precis, din cauză că unele dintre numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pot fi egale între ele.

Dacă în descompunerea

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

a unui polinom apar doi factori egali, în care al doilea termen este acelaşi număr a, adică apare factorul $(z - a)^2$, se spune că numărul a este o rădăcină *dublă* a ecuaţiei $P(z) = 0$, dacă apar trei factori egali, adică apare $(z - a)^3$, se spune că numărul a este o rădăcină *triplă* a ecuaţiei $P(z) = 0$; ş.a.m.d.

În general, *dacă în descompunerea unui polinom în factori liniari apare factorul $(z - a)^k$ şi nu apare o putere mai mare a lui $(z - a)$, se spune că numărul a este o rădăcină multiplă de ordinul k a ecuaţiei $P(z) = 0$.*

O rădăcină care nu este multiplă se numeşte rădăcină *simplă*.

---

* Această demonstraţie n-ar fi corectă dacă n-am şti că descompunerea unui polinom în factori liniari este unică. În adevăr, dacă ar exista o altă descompunere a aceluiaşi polinom

$$P(z) = a_0(z - z'_1)(z - z'_2) \ldots (z - z'_n)$$

unde în partea dreaptă ar apărea măcar un singur factor care nu apare şi în prima descompunere, de exemplu factorul $z - z'_1$, ecuaţia $P(z) = 0$ ar admite, pe lîngă rădăcinile $z_1, z_2, \ldots, z_n$, şi rădăcina z'_1.

Evident, o ecuaţie algebrică poate avea mai multe rădăcini multiple, fiecare dintre ele avînd ordinul ei de multiplicitate. De exemplu, dacă efectuăm operaţiile indicate de expresia

$$P(z) = (z - 5)^3(z - 1)^4(z - 7)^2(z - 2)$$

şi egalăm rezultatul cu zero, obţinem o ecuaţie algebrică care are: rădăcina triplă 5, rădăcina cuadruplă 1, rădăcina dublă 7 şi rădăcina simplă 2. În acest exemplu, ecuaţia este de gradul $3 + 4 + 2 + 1 = 10$ şi există numai 4 numere care o satisfac: 5, 1, 7 şi 2. Dar dacă considerăm rădăcina triplă ca trei rădăcini confundate, cea cuadruplă ca patru rădăcini confundate, iar cea dublă ca două rădăcini confundate, putem spune că ecuaţia are 10 rădăcini.

În general, dacă descompunerea unui polinom este de forma

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r},$$

ecuaţia $P(z) = 0$ are rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_r$, cu ordinele de multiplicitate $k_1, k_2, \dots, k_r$ respectiv.

Acum avem un rezultat precis:



O ecuaţie algebrică de gradul n are n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atîtea rădăcini confundate cît arată ordinul ei de multiplicitate.

2.2.9. **Observare.** Această teoremă ne arată cîte rădăcini are o ecuaţie algebrică, dar nu ne dă şi mijlocul de a le afla. Este o *teoremă de existenţă*. Acelaşi caracter are şi teorema fundamentală a algebrei. De asemenea şi teorema cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari; ea spune că un polinom de gradul *n se poate* descompune în *n* factori liniari, dar ea nu ne dă şi mijlocul de a-i afla.

• Aplicaţii

2.2.10. **Descompunerea în factori liniari şi rezolvarea ecuaţiilor.** Faptul că rădăcinile unui polinom se citesc din descompunerea lui în factori liniari, stabileşte o legătură între rădăcinile ecuaţiei algebrice $P(z) = 0$ şi descompunerea în factori a polinomului $P(z)$. A rezolva ecuaţia şi a descompune polinomul în factori liniari sînt două probleme echivalente: dacă ştim să rezolvăm una din ele, ştim s-o rezolvăm şi pe cealaltă.

Exemple. 1) Ecuaţia bipătrată,

$$4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$$

are rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$. Deci:

$$4x^4 - 13x^2 + 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

sau, dacă descompunem 4 în $2 \cdot 2$ şi înmulţim unul dintre aceşti factori cu primul binom, iar celălalt cu al doilea,

$$4x^4 - 13x^2 + 3 = (2x - 1)(2x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Pentru că am putut rezolva ecuaţia am putut descompune polinomul în factori liniari.

2) Considerăm ecuaţia

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

Scoatem în primii doi termeni x^2 în faţa parantezei, apoi $x + 2$.

$$P(x) = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 1)(x + 1).$$

Rădăcinile ecuaţiei sînt: -2, 1 şi -1. Pentru că am reuşit să descompunem polinomul $P(x)$ în factori, am putut rezolva ecuaţia.

2.2.11. Formarea unei ecuaţii cînd se cunosc rădăcinile ei. Pe baza aceleiaşi legături putem construi o ecuaţie algebrică care să aibă ca rădăcini nişte numere date dinainte.

Exemple. 1) *Să se formeze o ecuaţie algebrică care să aibă rădăcina dublă* 3 *şi rădăcina triplă* 1 *şi să nu aibă alte rădăcini.*

Ecuaţia este

$$(x - 3)^2(x - 1)^3 = x^5 - 9x^4 + 30x^3 - 46x^2 + 33x - 9 = 0.$$

2) *Să se formeze o ecuaţie algebrică care să aibă rădăcinile* $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, $5 + 2i$ *şi* $5 - 2i$ *şi să nu aibă alte rădăcini.*

Ecuaţia este

$$P(z) = (z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})(z - 5 - 2i)(z - 5 + 2i) = 0.$$

Primii doi factori sînt de forma $(a - b)(a + b)$ cu $a = z - 2$, $b = \sqrt{3}$ şi ultimii doi factori sînt de aceeaşi formă. Deci:

$$P(z) = [(z - 2)^2 - 3][(z - 5)^2 + 4] = (z^2 - 4z + 1)(z^2 - 10z + 29) = 0$$

sau

$$z^4 - 14z^3 + 70z^2 - 126z + 29 = 0.$$

Se putea proceda şi astfel: Se formează cu ajutorul sumei şi produsului rădăcinilor trinomul care are rădăcinile $2 + \sqrt{3}$ şi $2 - \sqrt{3}$, el este $z^2 - 4z + 1$, apoi

trinomul care are rădăcinile $5 + 2i$ şi $5 - 2i$, el este $z^2 - 10z + 29$, şi se înmulţesc între ele.

2.2.12. Condiţia ca două ecuaţii să aibă aceleaşi rădăcini. Fie

$$P(z) = 0 \text{ şi } Q(z) = 0$$

două ecuaţii algebrice care au aceleaşi rădăcini, de aceleaşi ordine de multiplicitate: z_1 de ordinul k_1, z_2 de ordinul k_2, ..., z_r de ordinul k_r. Atunci au loc identităţile:

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r} \qquad a_0 \neq 0$$

$$Q(z) = b_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r} \qquad b_0 \neq 0$$

unde a_0 şi b_0 sînt coeficienţii primului termen din $P(z)$ şi $Q(z)$. Dacă înmulţim expresia din dreapta a primei identităţi cu $\frac{b_0}{a_0}$ obţinem expresia din dreapta a identităţii a doua, deci

$$Q(z) = \frac{b_0}{a_0} P(z),$$

ceea ce înseamnă că polinomul $Q(z)$ diferă de $P(z)$ prin factorul constant $\frac{b_0}{a_0}$ (sau $P(z)$ diferă de $Q(z)$ prin factorul constant $\frac{a_0}{b_0}$).

Reciproc, presupunem că polinomul $Q(z)$ diferă de $P(z)$ printr-un factor constant k, $k \neq 0$

$$Q(z) = kP(z),$$

şi $P(z)$ are rădăcinile multiple $z_1, z_2, \dots, z_r$ cu ordinele $k_1, k_2, \dots, k_r$.

Atunci

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r}$$

iar

$$Q(z) = kP(z) = ka_0(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_r)^{k_r}$$

ceea ce înseamnă că $Q(z)$ are tot rădăcinile $z_1, z_2, \dots, z_r$ cu ordinele $k_1, k_2, \dots, k_r$. Aşadar:



Două ecuaţii algebrice au aceleaşi rădăcini, cu aceleaşi ordine de multiplicitate, dacă şi numai dacă diferă printr-un factor constant diferit de zero.

2.2.13. Observări. Pe baza acestei propoziţii se poate spune că un polinom este determinat de rădăcinile sale pînă la un factor constant.

Aceasta înseamnă că dacă printr-un procedeu oarecare, de exemplu prin cel de la 2.2.11 am construit o ecuaţie care să aibă ca rădăcini nişte numere date, orice altă ecuaţie care are aceleaşi rădăcini, rădăcinile multiple fiind de acelaşi

ordin, se obţine înmulţind ecuaţia găsită cu un factor constant arbitrar, diferit de zero.

2) Dacă scriem polinoamele $P(z)$ şi $Q(z)$ desfăşurat, condiţia ca ele să difere printr-un factor constant se scrie:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n = k\ (b_0z^n + b_1z^{n-1} + \ldots + b_n) \qquad k \neq 0$$

de unde egalînd coeficienţii corespunzători:

$$a_0 = kb_0,\ a_1 = kb_1,\ \ldots,\ a_n = kb_n,$$

de unde:

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

ceea ce înseamnă că coeficienţii sînt proporţionali.

Două ecuaţii algebrice au aceleaşi rădăcini, cu aceleaşi ordine de multiplicitate, dacă şi numai dacă coeficienţii lor sînt proporţionali.

Menţionăm că trecerea de la $a_i = kb_i$ la $\frac{a_i}{b_i} = k$ se poate face numai în relaţiile în care $b_i \neq 0$. Dacă $b_i = 0$, se obţine $a_i = 0$. Cînd două şiruri de numere sînt proporţionale şi un termen al unui şir este zero, termenul corespunzător din celălalt şir este de asemenea zero.

3) Condiţia $k \neq 0$ este esenţială, după cum arată exemplul următor: *Să se determine p şi q astfel încît ecuaţiile*

$$P(z) = pz^2 + (p + q)z + 2p - 3q = 0 \text{ şi } Q(z) = 2z^2 + 7z + 3 = 0$$

să aibă aceleaşi rădăcini.

Sistemul de ecuaţii

$$\frac{p}{2} = \frac{p+q}{7} = \frac{2p - 3q}{3} \text{ dă } p = q = 0.$$

Ar urma ca prima ecuaţie să fie $P(z) = 0z^2 + 0z + 0 = 0$, ceea ce este greşit, căci această ecuaţie are o infinitate de rădăcini, iar ecuaţia $Q(z) = 0$ are numai două. Greşeala provine de la faptul că, pentru $p = q = 0$, toate raporturile sînt egale cu zero — contrar condiţiei $k \neq 0$. Problema nu are soluţie.

2.3. RELAŢII ÎNTRE COEFICIENŢI ŞI RĂDĂCINI

2.3.1. Introducere. Se ştie că între coeficienţii ecuaţiei de gradul II

$$a_0z^2 + a_1z + a_2 = 0$$

şi rădăcinile ei, z_1 şi z_2 există relaţiile

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_0},\ z_1z_2 = \frac{a_2}{a_0}.$$

Acesta este numai un caz particular. Relaţii asemănătoare există între coeficienţii şi rădăcinile oricărei ecuaţii algebrice. De exemplu, în cazul ecuaţiei de gradul III

$$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0,$$

rădăcinile fiind z_1, z_2, z_3, relaţiile sînt:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{a_2}{a_0}, \quad z_1z_2z_3 = -\frac{a_3}{a_0},$$

relaţii asemănătoare există în cazul ecuaţiei de gradul IV, ş.a.m.d.

Pentru a putea deduce aceste formule, trebuie să stabilim în prealabil o propoziţie ajutătoare.

2.3.2. **Calcularea unui produs de mai mulţi factori liniari.** Este vorba de înmulţirea

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_n).$$

În cazul unui produs de doi factori, se obţine

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2;$$

înmulţind cu $z - z_3$, se obţine

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3;$$

înmulţind cu $z - z_4$, se obţine

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)z^2 - (z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)z + z_1z_2z_3z_4;$$

ş.a.m.d.

Se constată că, în toate cazurile, primul coeficient al produsului este 1;

coeficientul al doilea este suma numerelor z_1, z_2, ... luată cu semnul „—";

coeficientul următor este suma tuturor produselor de cîte doi factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, ... (în cazul produsului de doi factori, această „sumă" se reduce la un singur termen);

coeficientul următor este suma tuturor produselor de cîte trei factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, ..., luată cu semnul „—" (în cazul produsului de trei factori, această sumă se reduce la un singur termen) ş.a.m.d.

Şirul acestor coeficienţi se termină totdeauna cu produsul $\pm z_1z_2\ldots z_n$.

Ca să putem exprima acest fapt sub forma generală, introducem notaţiile următoare:

$$S_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$
$$S_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n,$$
$$S_3 = z_1z_2z_3 + \ldots + z_{n-2}z_{n-1}z_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_h = z_1z_2\ldots z_h + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = z_1z_2\ldots z_n.$$

Cu aceste notaţii, produsul de n factori se scrie:

$$(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) = z^n - S_1 z^{n-1} + S_2 z^{n-2} + \dots \qquad (S)$$
$$\dots + (-1)^k S_k z^{n-k} + (-1)^{k+1} S_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + (-1)^n S_n.$$

Vom demonstra această formulă prin inducţie completă*.

Formula este adevărată pentru $n = 2$. În adevăr,

$$(z - z_1)\ (z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 - S_1 z + S_2.$$

Presupunem acum că formula (S) este adevărată pentru n şi vom demonstra că ea este adevărată pentru $n + 1$.

Înmulţim în (S) ambele părţi cu $(z - z_{n+1})$. Obţinem

$$(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)\ (z - z_{n+1}) = (z^n - S_1 z^{n-1} + S_2 z^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (-1)^k\ S_k z^{n-k} + (-1)^{k+1} S_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + (-1)^n S_n)(z - z_{n+1}).$$

Efectuăm înmulţirea din partea dreaptă şi obţinem

$$z^{n+1} - (S_1 + z_{n+1})z^n + (S_2 + S_1 z_{n+1})z^{n-1} + \dots \qquad (S')$$
$$\dots + (-1)^{k+1}(S_{k+1} + S_k z_{n+1})z^{n-k} + \dots + (-1)^{n+1} S_{n+1}.$$

Examinăm expresia $S_{k+1} + S_k z_{n+1}$, care figurează în termenul general. S_{k+1} este suma tuturor produselor de cîte $(k + 1)$ factori ce se pot forma cu numerele $z_1, z_2, \dots, z_n$ sau, ceea ce este acelaşi lucru, suma tuturor produselor de cîte $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ excluzîndu-l pe z_{n+1}; S_k este suma tuturor produselor de k factori ce se pot forma cu numerele $z_1, z_2, \dots, z_n$, deci $S_k z_{n+1}$ este suma tuturor produselor de $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ şi care conţin factorul z_{n+1}. Rezultă că expresia $S_{k+1} + S_k z_{n+1}$ este suma tuturor produselor de $(k + 1)$ factori ce se pot forma din numerele $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$. Afirmaţia analogă se poate face despre toate parantezele din (S'), deci (S') se poate scrie

$$z^{n+1} - T_1 z^n + T_2 z^{n-1} + \dots + (-1)^{k+1}\ T_{k+1}\ z^{n-k} + \dots (-1)^{n+1}\ T_{n+1} \qquad (T)$$

(am pus $S_1 + z_{n+1} = T_1$, $S_2 + S_1 z_{n+1} = T_2$, ş.a.m.d.), unde T_1 este suma nume-

---

* Este util ca în prealabil să se calculeze efectiv produsul de patru factori pornind de la produsul de trei factori:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = [z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z -$$
$$- z_1 z_2 z_3](z - z_4) = z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 +$$
$$+ z_1 z_4 + z_2 z_4 + z_3 z_4)z^2 - (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4)z + z_1 z_2 z_3 z_4.$$

Aici se văd direct cele două feluri de produse care apar în fiecare coeficient. De exemplu, în coeficientul lui z^2, primii trei termeni sînt toate produsele de cîte doi factori care se pot forma din numerele z_1, z_2, z_3, z_4 şi care nu conţin z_4, iar termenii următori sînt toate produsele de cîte doi factori care se pot forma din aceleaşi numere şi conţin z_4. Acelaşi lucru se constată şi la ceilalţi coeficienţi.

relor $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}$, T_2 este suma produselor de cîte doi factori ce se pot forma cu aceleaşi numerere, ş.a.m.d., adică

$$T_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1}$$
$$T_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_nz_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{n+1} = z_1z_2 \ldots z_nz_{n+1}.$$

Rezultă că expresia (T) este de aceeaşi formă ca partea dreaptă din (S), ceea ce a fost de demonstrat.

2.3.3. Formulele lui Vieta. Pe baza formulei (S), putem demonstra uşor relaţiile anunţate la început.

Între coeficienţii unei ecuaţii algebrice

(E) $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_kz^{n-k} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0$

şi rădăcinile ei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ există relaţiile

$$S_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} + z_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$S_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$S_3 = z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \ldots + z_{n-2}z_{n-1}z_n = -\frac{a_3}{a_0},$$

(V)
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_k = z_1z_2z_3 \ldots z_k + \ldots = (-1)^k \frac{a_k}{a_0},^*$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = z_1z_2 \ldots z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Reciproc, fiind dată ecuaţia $P(z) = 0$, dacă numerele $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfac relaţiile (V), ele sînt rădăcinile ecuaţiei.

Simbolic,

$$[P(z_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n] \Leftrightarrow (V).$$

---

* În partea dreaptă figurează semnul „+" (nici un semn) sau „—", după cum termenii din partea stîngă sînt formaţi dintr-un număr par sau impar de factori. Acest lucru se exprimă prin factorul $(-1)^k$, căci $(-1)^k$ este egal cu $+1$ sau cu -1, după cum k este par sau impar.

Pentru a demonstra această teoremă, descompunem polinomul $P(z)$ în factori.

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_kz^{n-k} + \dots + a_n =$$
$$= a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k) \dots (z - z_n)$$

sau împărţind prin a_0,

$$z^n + \frac{a_1}{a_0} z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{n-2} + \dots + \frac{a_k}{a_0} z^{n-k} + \dots + \frac{a_n}{a_0} =$$
$$= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k) \dots (z - z_n)$$

şi, înlocuind produsul din dreapta cu expresia dată de relaţia (S) de la 2.3.2,

$$z^n + \frac{a_1}{a_0} z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{n-2} + \dots + \frac{a_k}{a_0} z^{n-k} + \dots + \frac{a_n}{a_0} =$$
$$= z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \dots (-1)^k S_k + \dots (-1)^n S_n.$$

Egalînd coeficienţii corespunzători, se obţine:

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0}, S_2 = \frac{a_2}{a_0}, \dots, S_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}, \dots, S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0},$$ adică

formulele (V).

Reciproc, să presupunem că între coeficienţii ecuaţiei (E) şi numerele $z_1, z_2, \dots, z_n$ există relaţiile (V), pe care le punem sub forma:

$$a_1 = -a_0S_1, \ a_2 = a_0S_2, \ \dots, \ a_k = (-1)^k a_0S_k, \ \dots, \ a_n = (-1)^n a_0S_n.$$

Înlocuind în partea stîngă a ecuaţiei (E) $a_1, a_2, \dots, a_n$ prin aceste expresii şi scoţînd factorul comun a_0, obţinem:

$$P(z) = a_0(z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-1} + \dots + (-1)^k S_k z^{n-k} + \dots + (-1)^n S_n),$$

iar pe baza relaţiei (S):

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Acum se vede că $P(z_1) = 0, P(z_2) = 0, \dots, P(z_n) = 0$, căci pentru $z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_n$, unul dintre factorii din dreapta se anulează, deci $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt rădăcinile ecuaţiei (E) — ceea ce a fost de demonstrat.

Dacă introducem notaţiile

$$\Pi\,(z - z_i) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$
$$S(z) = z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \dots + (-1)^n S_n,$$

şi notăm cu (V) relaţiile care fac obiectul acestei teoreme, demonstraţia teoremei directe se poate rezuma prin schema:

$$\left.\begin{array}{l}[P(z_i) = 0] \underset{(1)}{\Rightarrow} [P(z) = a_0\Pi(z - z_i)] \\ \qquad\qquad\qquad \Pi(z - z_i) \underset{(2)}{=} S(z)\end{array}\right\} \underset{(3)}{\Rightarrow} P(z) = a_0S(z) \underset{(4)}{\Rightarrow} (V)$$

unde cifrele dintre paranteze arată pe ce se bazează relaţia respectivă şi anume:

(1) teorema cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari.

(2) formula după care se exprimă un produs de forma $(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$, adică formula (S) de la 2.3.2.

(3) tranzitivitatea relaţiei de egalitate,

(4) condiţia ca două polinoame să fie identice.

Schema demonstraţiei reciprocei este

$$\left.\begin{array}{l}(V) \underset{(4)}{\Rightarrow} [P(z) = a_0S(z)] \\ \qquad [S(z) \underset{(2)}{=} \Pi(z - z_i)]\end{array}\right\} \underset{(3)}{\Rightarrow} [P(z) = a_0\Pi(z - z_i)] \underset{(1)}{\Rightarrow} [P(z_i) = 0].$$

Relaţiile (V) dintre coeficienţii şi rădăcinile unei ecuaţii algebrice se numesc şi *formulele lui Vieta*, după numele matematicianului francez François Viète (Vieta), unul din fondatorii algebrei.

2.3.4. **Observări.** 1) Se constată că expresiile din stînga sînt simetrice* în raport cu rădăcinile ecuaţiei. De exemplu, dacă în expresia

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

punem z_1 în loc de z_2 şi invers, obţinem o expresie egală cu ea. Acelaşi lucru se constată şi dacă se schimbă z_1 cu z_3 sau z_2 cu z_3; de asemenea şi oricare ar fi relaţia considerată.

Este firesc să fie aşa, căci rădăcinile unei ecuaţii date sînt anumite numere, care rămîn aceleaşi oricum le-am nota sau numerota.

2) În cazul ecuaţiei de gradul IV, relaţiile se obţin astfel:

Prima relaţie nu prezintă nici o dificultate: primul membru este $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$; pentru relaţia a doua, se înmulţeşte fiecare rădăcină, pe rînd, cu toate rădăcinile următoare: z_1 cu z_2, z_1 cu z_3 ş.a.m.d.; pentru a scrie relaţia a treia,

* Cuvîntul *simetric* are aici aproape acelaşi sens ca în geometrie. Cînd o figură admite o axă de simetrie, ea rămîne neschimbată atunci cînd schimbăm între ele cele două părţi situate de o parte şi de alta a axei — o expresie simetrică în raport cu două litere rămîne neschimbată dacă schimbăm între ele cele două litere.

parcurgem şirul z_1, z_2, z_3, z_4 de la dreapta la stînga şi suprimăm pe rînd cîte o rădăcină: suprimăm z_4 şi obţinem $z_1z_2z_3$, suprimăm z_3 şi obţinem $z_1z_2z_4$ ş.a.m.d.

3) Pentru unele probleme, este util ca, în cazul ecuaţiei de gradul IV, relaţia a doua şi a treia să fie puse sub forma:

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1z_2 + z_3z_4 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4(z_1 + z_2) = -\frac{a_3}{a_0}.$$

• Aplicaţii

Formulele lui Vieta joacă un rol important în teoria ecuaţiilor, rol care apare într-un studiu mai adîncit al algebrei. Aici se vor da numai cîteva aplicaţii imediate.

2.3.5. **Cazul cînd ecuaţia are coeficienţii numerici.** *Să se rezolve ecuaţia*

$$4z^3 - 24z^2 + 65z - 87 = 0$$

cînd se dă că între rădăcinile ei există relaţia $z_1 + z_2 = z_3$.

Scriem formulele lui Vieta:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 6, \tag{1}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{65}{4}, \tag{2}$$

$$z_1z_2z_3 = \frac{87}{4} \tag{3}$$

şi relaţia dată:

$$z_1 + z_2 = z_3. \tag{4}$$

A rezolva ecuaţia propusă revine la rezolvarea sistemului format din ecuaţiile (1)—(3). Se dă, în plus, relaţia (4), avem deci un sistem de 4 ecuaţii cu 3 necunoscute.

Din (1) şi (4) rezultă că

$$z_1 + z_2 = 3,\ z_3 = 3 \tag{5}$$

Punem (2) sub forma

$$z_1 z_2 + z_3(z_1 + z_2) = \frac{65}{4} \qquad (2')$$

şi, înlocuind aici z_3 şi $z_1 + z_2$ prin valorile date de (5), obţinem

$$z_1 z_2 = \frac{29}{4}. \qquad (6)$$

Din (5) şi (6) rezultă că z_1 şi z_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$4z^2 - 12z + 29 = 0; \quad z_{1,2} = \frac{3 \pm 2i\sqrt{5}}{2}.$$

Se constată că şi ecuaţia (3), pe care n-am folosit-o, este satisfăcută, căci $(z_1 z_2)z_3 = \frac{29}{4}.3 = \frac{87}{4}$.

Rădăcinile ecuaţiei sînt: $z_{1,2} = \frac{3 \pm 2i\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = 3$.

2.3.6. **Observări:** 1) După ce am aflat că $z_3 = 3$, putem împărţi partea stîngă a ecuaţiei date prin $z - 3$. Cîtul este $4z^2 - 12z + 29$ şi dă rădăcinile z_1 şi z_2.

2) După ce am obţinut relaţiile (5), putem folosi relaţia (3). Înlocuind aici z_3 prin 3, se obţine (6) şi se poate continua ca mai înainte.

2.3.7. **Cazul cînd unul dintre coeficienţii ecuaţiei este variabil.** Dacă adoptăm soluţia dată la început, relaţia (3) rămîne nefolosită. Aceasta înseamnă că am rezolvat ecuaţia fără să cunoaştem termenul liber (ştiind în schimb că $z_1 + z_2 = z_3$). Am rezolvat deci problema următoare:

Să se rezolve ecuaţia

$$4z^3 - 24z^2 + 65z + a = 0$$

cînd se dă că $z_1 + z_2 = z_3$ *şi să se determine valoarea lui* a.

În adevăr, după ce am aflat rădăcinile, relaţia (3), care se scrie acum $z_1 z_2 z_3 = -\frac{a}{4}$ (dar a rămas nefolosită) ne dă

$$-\frac{a}{4} = \frac{3 - 2i\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 + 2i\sqrt{5}}{2} \cdot 3 = \frac{87}{4}; \; a = -87.$$

Sistemul format de ecuaţiile (1), (2), $z_1 z_2 z_3 = -\frac{a}{4}$, şi (4) are o soluţie dacă şi numai dacă $a = -87$.

Dacă mergem pe calea indicată în observarea 2) de mai sus, relaţia (2) rămîne nefolosită. Deci, pe această cale se poate rezolva problema:

Să se rezolve ecuația:

$$4z^3 - 24z^2 + az - 87 = 0$$

știind că $z_1 + z_2 = z_3$ și să se determine valoarea lui a.

2.3.8. **Cazul cînd toți coeficienții ecuației sînt variabili.** *Să se determine condiția necesară și suficientă pe care trebuie s-o îndeplinească coeficienții ecuației*

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

pentru ca între rădăcinile ei să existe relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.

Aplicație numerică. Să se verifice că ecuația

$$z^4 - 12z^3 + 53z^2 - 102z + 70 = 0$$

satisface condiția găsită și să se rezolve.

Scriem relațiile lui Vieta, precum și relația dată

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -a, \quad (1)$$
$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1z_2 + z_3z_4 = b, \quad (2)$$
$$z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4(z_1 + z_2) = -c, \quad (3)$$
$$z_1z_2z_3z_4 = d, \quad (4)$$
$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4. \quad (5)$$

Avem aici un sistem de 5 ecuații cu 4 necunoscute, z_1, z_2, z_3, z_4. Pentru ca între rădăcinile ecuației să existe relația (5), este necesar și suficient ca acest sistem să fie compatibil.

Rezolvăm sistemul format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5).

Din (1) și (5) rezultă

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = -\frac{a}{2}, \quad (6)$$

Înlocuind în (2), obținem

$$z_1z_2 + z_3z_4 = b - \frac{a^2}{4}. \quad (7)$$

Ecuațiile (4) și (7) ne dau suma și produsul numerelor $q = z_1z_2$, $r = z_3z_4$. Cunoscînd $q = z_1z_2$ și, din (6), $z_1 + z_2 = -\frac{a}{2}$, putem afla z_1 și z_2; analog, cunoscînd $z_3z_4 = r$ și $z_3 + z_4 = -\frac{a}{2}$, putem afla z_3 și z_4. Deci rădăcinile ecuației se pot afla fără a folosi ecuația (3).

Soluțiile sistemului format din ecuațiile (1), (2), (4) și (5) fiind aflate, totul depinde de rezultatul care se obține înlocuind în (3) x_1, x_2, x_3 și x_4 prin valorile lor. Pentru a face înlocuirea, nu este necesar să aflăm efectiv rădăcinile. Pe baza relațiilor (6), ecuația (3) se scrie

$$z_1z_2\left(-\frac{a}{2}\right) + z_3z_4\left(-\frac{a}{2}\right) = -c; \quad \frac{a}{2}(z_1z_2 + z_3z_4) = c,$$

iar pe baza ecuației (7), ea devine

$$\frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right) = c$$

sau

(R) $$a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

Între rădăcinile ecuației există relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă și numai dacă între coeficienții ecuației există această relație,

$$[z_1 + z_2 = z_3 + z_4] \Leftrightarrow [a^3 - 4ab + 8c = 0].$$

În adevăr, sistemul format de ecuațiile (1), (2), (4) și (5) este compatibil, iar relația (R) exprimă faptul că orice soluție a acestui sistem satisface și ecuația (3). Dacă sistemul complet este compatibil, acea soluție satisface și ecuația (3), deci are loc relația (R), ceea ce înseamnă că (R) este o condiție necesară. Reciproc, dacă relația (R) are loc, orice soluție a ecuațiilor (1), (2), (4) și (5) satisface și ecuația (3), deci sistemul este compatibil — ceea ce înseamnă că (R) este o condiție suficientă.

În aplicația numerică, $a = -12$, $b = 53$, $c = -102$, $d = 70$.

$$(-12)^3 - 4(-12)\,53 - 8 \cdot 102 = 0,$$

deci ecuația satisface condiția (R). Ecuațiile (7) și (4) sînt în acest caz

$$z_1z_2 + z_3z_4 = 17, \tag{7'}$$

$$(z_1z_2)(z_3z_4) = 70 \tag{4'}$$

z_1z_2 și z_3z_4 sînt rădăcinile ecuației

$$t^2 - 17t + 70 = 0, \text{ care dă } t_1 = 7,\ t_2 = 10,$$

deci

$$z_1z_2 = 7, \qquad z_3z_4 = 10. \tag{8}$$

Ecuaţia (6) se scrie

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = 6. \tag{9}$$

Relaţiile (8) şi (9) arată că z_1, z_2 şi z_3, z_4 sînt, respectiv, rădăcinile ecuaţiilor

$$t^2 - 6t + 7 = 0 \text{ şi } t^2 - 6t + 10 = 0,$$

care dau:

$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}, \quad z_{3,4} = 3 \pm \mathrm{i}.$$

2.3.9. **Observare.** Se constată că în condiţia aflată nu figurează coeficientul d. Acest lucru nu are nimic surprinzător. El arată că, dacă între rădăcinile unei ecuaţii de gradul IV există relaţia $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ şi schimbăm ultimul coeficient (de exemplu, dacă în ecuaţia din enunţul problemei punem în loc de 70 orice alt număr) rădăcinile se schimbă, dar între ele va exista aceeaşi relaţie.

Relaţia aflată nu trebuie să cuprindă neapărat toţi coeficienţii. Ea poate să cuprindă chiar numai un singur coeficient. De exemplu, condiţia necesară şi suficientă ca suma rădăcinilor ecuaţiei $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$ să fie $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ este $p = -1$; q şi r sînt arbitrari.

2.3.10. **Procedeul prin identificare.** Reluăm problema precedentă (2.3.8.) şi fie z_1, z_2, z_3, z_4 rădăcinile ecuaţiei propuse. z_1 şi z_2 sînt rădăcinile unei ecuaţii de forma $z^2 + pz + q = 0$, z_3 şi z_4 sînt rădăcinile unei ecuaţii $z^2 + p'z + r = 0$, $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă şi numai dacă $p' = p$. Deci ecuaţia îndeplineşte condiţia $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ dacă şi numai dacă poate fi pusă sub forma

$$(z^2 + pz + q)(z^2 + pz + r) = 0$$

sau, după efectuarea înmulţirii,

$$z^4 + 2pz^3 + (p^2 + q + r)z^2 + p(q + r)z + qr = 0.$$

Egalînd coeficienţii acestei ecuaţii cu coeficienţii ecuaţiei propuse, obţinem sistemul

$$2p = a, \tag{1'}$$

$$p^2 + q + r = b, \tag{2'}$$

$$p(q + r) = c, \tag{3'}$$

$$qr = d. \tag{4'}$$

Urmează să găsim condiţia necesară şi suficientă ca acest sistem să fie compatibil. Rezolvăm sistemul format din ecuaţiile (1′), (2′) şi (4′).

Ecuaţia (1′) dă $p = \frac{a}{2}$. Introducînd în (2′), se obţine $q + r = b - \frac{a^2}{4}$; această ecuaţie împreună cu (4′) ne dă q şi r. Deci p, q şi r se pot afla din ecuaţiile (1′), (2′) şi (4′). Necesar şi suficient ca sistemul să fie compatibil este ca valorile aflate pentru p, q şi r să satisfacă şi (3′). Înlocuind în (3′) p prin $\frac{a}{2}$ şi $q + r$ prin $b - \frac{a^2}{4}$, se obţine condiţia (R) de mai înainte.

În cazul ecuaţiei cu coeficienţi numerici, ecuaţiile (1′), (3′) şi (4′) devin

$$2p = -12, \quad p(q + r) = -102, \quad qr = 70.$$

Prima dintre aceste ecuaţii dă $p = -6$, a doua devine acum $q + r = 17$. Această ecuaţie, împreună cu ultima dau $q = 7$, $r = 10$ (sau $q = 10$, $r = 7$, ceea ce revine la acelaşi lucru). Ecuaţiile care dau z_1, z_2 şi z_3, z_4 sînt, respectiv,

$$t^2 - 6t + 7 = 0 \text{ şi } t^2 - 6t + 10 = 0$$

aceleaşi care au apărut mai înainte.

2.3.11. **Observare.** Analogia dintre acest procedeu şi cel precedent este izbitoare. Ecuaţiile (1′) — (4′) se obţin din ecuaţiile (1) — (4) înlocuind $z_1 + z_2$ şi $z_3 + z_4$ prin $-p$, z_1z_2 prin q şi z_3z_4 prin r. Aceasta se explică prin faptul că atunci cînd aplicăm formulele lui Vieta, procedăm, în fond, tot prin identificare; căci aceste formule se obţin prin identificare. Se identifică, în cazul de faţă, polinomul dat cu polinomul care se obţine efectuînd înmulţirea $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$.

În procedeul al doilea se porneşte, în mod tacit, tot de la produsul $(z - z_1)\ (z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, dar factorii se grupează astfel: primii doi factori dau un produs $z^2 + pz + q$, ultimii doi — un produs $z^2 + p'z + r$, deci polinomul se identifică cu produsul $(z^2 + pz + q)\ (z^2 + p'z + r)$ şi, datorită condiţiei $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$, se înlocuieşte în prealabil p' prin p. Deci, procedeul al doilea ocoleşte formulele lui Vieta: se merge direct la sursă care este identificarea. Avantajul constă în faptul că notaţia este mai simplă (în primul procedeu, $q = z_1z_2$ şi $r = z_3z_4$ se introduc ca necunoscute ajutătoare, pe cînd în procedeul al doilea aceste necunoscute apar de la început) şi condiţia $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ se introduce de la început.

2.3.12. **Recomandări.** 1) Rezolvarea problemelor de acest tip constă în eliminarea necunoscutelor $z_1, z_2, \ldots, z_n$ din sistemul de $n + 1$ ecuaţii format din

cele n relaţii ale lui Vieta şi relaţia dată. Această eliminare se poate face în mai multe moduri. Dacă nu se procedează cu suficientă grijă, se deduce din ecuaţiile date o relaţie între coeficienţi, dar din calcule rezultă numai implicaţia într -un singur sens; în cazul de faţă:

$$[z_1 + z_2 = z_3 + z_4] \Rightarrow [a^3 - 4ab + 8c = 0].$$

Cu alte cuvinte, se obţine numai condiţia necesară. Demonstraţia implicaţiei în celălalt sens (condiţia aflată este şi suficientă) cere de multe ori calcule foarte laborioase, iar fără această demonstraţie problema nu este complet rezolvată.

În lipsa unei teorii generale a eliminării, care nu se face în şcoală, se poate folosi regula următoare — pe care am aplicat-o în problema precedentă.

Fiind dat un sistem de $n + 1$ ecuaţii cu n necunoscute cu parametrii $a, b, \ldots, c$, pentru a găsi condiţia necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil, se aleg n ecuaţii şi se rezervă una. Sistemul format din cele n ecuaţii se rezolvă, iar valorile aflate pentru necunoscute se introduc în ecuaţia rezervată. Relaţia (R) între parametrii care se obţine astfel este condiţia căutată.

În exemplul nostru, am ales sistemul format din ecuaţiile (1), (2), (4) şi (5) şi am rezervat ecuaţia (3).

2) În unele probleme, cînd se dă o relaţie (S) între rădăcini, se află uşor o rădăcină a ecuaţiei. Atunci se obţine foarte uşor o relaţie (R) între coeficienţi punînd condiţia ca valoarea aflată să satisfacă ecuaţia, dar acest procedeu nu este corect.

În adevăr, se demonstrează numai implicaţia $(S) \Rightarrow$ (R); rămîne să se demonstreze şi implicaţia inversă $(R) \Rightarrow$ (S); cu alte cuvinte, se găseşte numai condiţia necesară, nu şi cea suficientă.

2.4. RĂDĂCINI MULTIPLE

2.4.1. Obiectul acestui paragraf. Noţiunea de rădăcină multiplă este cunoscută (2.2.8). De exemplu, dacă descompunerea unui polinom $P(z)$ este

$$P(z) = (z - 3)^2(z - 5)^3(z - 7),$$

ecuaţia $P(z) = 0$ are rădăcina dublă 3, rădăcina triplă 5 şi rădăcina simplă 7.

În cele ce urmează, vom arăta că există o legătură între rădăcinile multiple ale unei ecuaţii algebrice $P(z) = 0$ şi rădăcinile derivatelor* lor $P'(z) = 0$, $P''(z) = 0$, ş.a.m.d.

---

* Este o exprimare prescurtată; există derivata unei funcţii, nu a unei ecuaţii. Sensul acestei expresii rezultă din modul în care o folosim.

Pentru a arăta în linii mari despre ce este vorba, considerăm, de exemplu, ecuaţia

$$P(z) = (z - a)^4 = 0,$$

care are rădăcina cuadruplă $z = a$.

Derivatele consecutive sînt

$$P'(z) = 4(z - a)^3, P''(z) = 12(z - a)^2, P'''(z) = 24(z - a), P^{IV}(z) = 24.$$

Se constată că numărul a satisface primele trei derivate, dar nu satisface derivata a patra şi, pe măsură ce luăm derivatele consecutive, ordinul de multiplicitate al rădăcinii scade cu cîte o unitate.

Ecuaţia	$P(z) = 0$	$P'(z) = 0$	$P''(z) = 0$	$P'''(z) = 0$	$P^{IV}(z) = 0$
Ordinul rădăcinii	4	3	2	1	0

Deoarece intervin funcţii (polinomiale) de o variabilă complexă, trebuie să extindem noţiunea de derivată; la analiză s-au tratat numai funcţii reale de variabilă reală.

2.4.2. Derivata unei funcţii întregi de o variabilă complexă.

Derivata unui polinom cu coeficienţi complecşi

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n, \ z \in C$$

este polinomul

$$P'(z) = na_0z^{n-1} + (n - 1)a_1z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

De exemplu, derivata polinomului

$$P(z) = z^4 + (1 - 2i)z^3 - (\sqrt{2} + 3i)z^2 + 5iz - (1 + i)$$

este

$$P'(z) = 4z^3 + 3(1 - 2i)z^2 - 2(\sqrt{2} + 3i)z + 5i.$$

În analiză, această propoziţie se demonstrează, pe baza definiţiei cunoscute a derivatei unei funcţii; pentru cazul polinoamelor cu coeficienţi complecşi, ea este *definiţia* derivatei.

Pornind de la această definiţie, formală, a derivatei, avem dreptul să aplicăm regulile cunoscute pentru a calcula derivata oricărei expresii întregi.

În adevăr, fie $A(x)$ şi $B(x)$ două polinoame cu coeficienţi reali şi $C(x) = A(x)\,B(x)$ produsul lor. În analiză se demonstrează că

(*) $$C'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x).$$

Deoarece produsul $C(x)$ este tot un polinom, ca şi $A(x)$ şi $B(x)$, derivata sa poate fi calculată şi fără această formulă: se efectuează înmulţirea $A(x)\ B(x)$ şi se derivează produsul obţinut. Rezultatele trebuie să concorde; relaţia (*) este o identitate. De exemplu, dacă

$$A(x) = x^2 - 5x + 2, \quad B(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Avem:

$$C(x) = A(x)B(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + x + 2.$$

Dacă calculăm derivata polinomului $C(x)$, obţinem

$$C'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 1;$$

dacă aplicăm formula (*), avem

$$A'(x) = 2x - 5, \quad B'(x) = 2x + 3$$

deci

$$C'(x) = (2x - 5)(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)(x^2 - 5x + 2).$$

Are loc identitatea:

$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + x + 2 = (2x - 5)\ (x^2 + 3x + 1) + (2x + 3)(x^2 - 5x + 2)$, ceea ce se poate verifica, efectuînd calculele din partea dreaptă.

Aşadar, relaţia (*) este o identitate. Ea are un caracter pur algebric, căci intervin numai adunări şi înmulţiri de polinoame.

Să presupunem acum că $A(x)$ şi $B(x)$ sînt polinoame cu coeficienţi complecşi, deci $C(x)$ este de asemenea un polinom cu coeficienţi complecşi.

Tot ce s-a spus aici despre derivata unui produs rămîne adevărat. În adevăr, conform definiţiei derivatei unui polinom cu coeficienţi complecşi, derivata $A'(x)$, $B'(x)$ şi $C'(x)$ se calculează după aceleaşi formule ca în cazul polinoamelor cu coeficienţi reali şi operaţiile cu polinoame se fac după aceleaşi reguli indiferent dacă coeficienţii lor sînt reali sau complecşi. Rezultă că formula (*) este valabilă şi în cazul polinoamelor cu coeficienţi complecşi.

2.4.3. Definiţie.

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul $k(k \in N)$ a ecuaţiei algebrice $P(z) = 0$ dacă şi numai dacă $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, iar cîtul $C(z) = P(z) : (z - a)^k$ nu se anulează pentru $z = a$.

Simbolic: $[a$ răd. mult. k, $P(z) = 0] \Leftrightarrow$
$[\exists C(z)$ astfel încît $\forall z$, $z \in C$ $P(z) = (z - a)^k\, C(z)$ şi $C(a) \neq 0]$.

(„a răd. mult. k“ trebuie citit „a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației“).

De exemplu, după cum am văzut (2.4.1), ecuația

$$P(z) = (z - 1)^2(z - 5)^3(z - 7)$$

are rădăcina dublă 1, rădăcina triplă 5 și rădăcina simplă 7. Polinomul $P(z)$ este divizibil prin $(z - 1)^2$ și cîtul

$$P(z) : (z - 1)^2 = (z - 5)^3(z - 7)$$

nu se anulează pentru $z = 1$; $P(z)$ este divizibil prin $(z - 5)^3$ și cîtul

$$P(z) : (z - 5)^3 = (z - 1)^2(z - 7)$$

nu se anulează pentru $z = 5$; $P(z)$ este divizibil prin $(z - 7)$ și cîtul

$$P(z) : (z - 7) = (z - 1)^2(z - 5)^3$$

nu se anulează pentru $z = 7$.

2.4.4. **Observare.** Se poate demonstra că această definiție a rădăcinii multiple este echivalentă cu cea dată înainte (2.2.8).

De asemenea, condiția $C(a) \neq 0$ este echivalentă cu condiția ca polinomul să nu fie divizibil printr-o putere mai mare a lui $z - a$ decît k. Deci:

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă polinomul $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, $(k \in N)$, și nu este divizibil prin $(z - a)^{k+1}$.

Bineînțeles, dacă polinomul $P(z)$ nu este divizibil prin $(z - a)^{k+1}$, el nu va fi divizibil prin nici o putere a lui $(z - a)$ mai mare decît k.

2.4.5. **Propoziție auxiliară. O rădăcină $z = a$ a ecuației algebrice $P(z) = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul k dacă și numai dacă este rădăcină multiplă de ordinul $k - 1$ a derivatei $P'(z) = 0$.**

Simbolic,

$$[a \text{ răd. mult. } k\ P(z) = 0] \Leftrightarrow [a \text{ răd. mult. } (k - 1)\ P'(z) = 0]$$

În adevăr, fie $P(z) = 0$ o ecuație algebrică și fie a o rădăcină multiplă a ei de ordinul k. Conform definiției, există un polinom $C(z)$ astfel ca să aibă loc identitatea

$$P(z) = (z - a)^k C(z), \quad C(a) \neq 0.$$

Această relație exprimă faptul că dacă efectuăm calculele din partea dreaptă, obținem un polinom identic cu $P(z)$. Rezultă că dacă vom deriva expresia din dreapta, vom obține o expresie care efectuată, va da un polinom identic cu polinomul $P'(z)$. Cu alte cuvinte, avem dreptul de „a deriva“ identitatea. Obținem identitatea

$$P'(z) = k(z - a)^{k-1}C(z) + (z - a)^{k}C'(z)$$

(am aplicat regula după care se derivează un produs).

Scoatem în partea dreaptă factorul comun $(z - a)^{k-1}$:

$$P'(z) = (z - a)^{k-1} [kC(z) + (z - a)C'(z)].$$

Factorul $(z - a)^{k-1}$ arată că numărul a este rădăcină multiplă cel puțin de ordinul $k - 1$; rămîne să examinăm expresia din paranteza mare. Pentru $z = a$, termenul al doilea, $(z - a)C'(z)$, se anulează, iar primul termen dă $k\,C(a)$, care este diferit de zero, căci, prin ipoteză, $C(a) \neq 0$. Rezultă că expresia dintre paranteze nu se anulează pentru $z = a$, deci a este rădăcină multiplă de ordinul $k - 1$ a ecuației $P'(z) = 0$.

Reciproc, presupunem că o rădăcină a a ecuației algebrice $P(z) = 0$ este rădăcină multiplă de ordinul $k - 1$ a derivatei $P'(z) = 0$. Ce ordin de multiplicitate are ea pentru ecuația inițială $P(z) = 0$? Fie s ordinul de multiplicitate. Atunci, după cum am demonstrat, numărul a este rădăcină multiplă de ordinul $s - 1$ a derivatei, deci

$$s - 1 = k - 1, \text{ de unde } s = k,$$

ceea ce a fost de demonstrat.

Pe baza acestei propoziții putem demonstra teorema anunțată.

2.4.6. Teoremă.

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a unei ecuații algebrice $P(z) = 0$ dacă și numai dacă el anulează polinomul $P(z)$ și primele sale $k - 1$ derivate, și nu anulează derivata de ordinul k.

$$[a \text{ răd. mult.} k\ P(z) = 0] \Leftrightarrow [P(a) = 0,\ P'(a) = 0,\ P''(a) = 0 \ldots P^{k-1}(a) = 0,\ P^{k)}(a) \neq 0].$$

Vom face demonstrația pe cazul $k = 4$. Va trebui să demonstrăm că numărul a este rădăcină cuadruplă a ecuației $P(z) = 0$ dacă și

numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) = 0$, $P'''(a) = 0$, $P^{IV}(a) \neq 0$.

Considerăm ecuațiile

$$P(z) = 0, \ P'(z) = 0, \ P''(z) = 0, \ P'''(z) = 0, \ P^{IV}(z) = 0.$$

Fiecare dintre ele este derivata celei precedente.

Privim primele două ecuații. Deoarece numărul a este rădăcină cuadruplă a primei ecuații, el este, conform propoziției auxiliare, rădăcină triplă a ecuației $P'(z) = 0$. Acum considerăm ecuația a doua și a treia, $P'(z) = 0$, $P''(z) = 0$, și privim $P'(z)$ ca polinomul dat, deci $P''(z)$ ca derivata sa. Tot propoziția auxiliară ne arată că numărul a este rădăcină dublă a ecuației $P''(z) = 0$. Repetăm raționamentul, conchidem că numărul a este rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$. În sfîrșit, considerăm ultimele două ecuații și privim $P'''(z) = 0$ ca ecuația dată, deci $P^{IV}(z) = 0$ ca derivata ei. Deoarece numărul a este rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$, rezultă că $P^{IV}(a) \neq 0$.

Pentru a demonstra implicația inversă, parcurgem același șir de ecuații de la dreapta spre stînga.

Considerăm ecuațiile $P'''(z) = 0$, $P^{IV}(z) = 0$, dintre care a doua este derivata primei. Deoarece $P'''(a) = 0$, $P^{IV}(a) \neq 0$, numărul a este, conform definiției, rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$; a fiind rădăcină simplă a ecuației $P'''(z) = 0$ și anulînd $P''(z)$ (căci s-a presupus $P''(a) = 0$), este, conform propoziției auxiliare, rădăcină dublă a ecuației $P''(z) = 0$. Continuînd în acest fel, se ajunge la concluzia că a este rădăcină cuadruplă a ecuației $P(z) = 0$ — ceea ce a fost de demonstrat.

În particular, a este o rădăcină *dublă* a ecuației algebrice $P(z) = 0$, dacă și numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) \neq 0$; a este rădăcină *triplă*, dacă și numai dacă $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, $P''(a) = 0$, $P'''(a) \neq 0$ ș.a.m.d.

• Aplicații

2.4.7. Rezolvarea unei ecuații care are o rădăcină multiplă. *Se consideră ecuația*

$$P(z) = z^4 - 11z^3 + 42z^2 + mz + n = 0.$$

Să se determine m și n astfel ca ecuația să aibă o rădăcină triplă și să se rezolve ecuația.

Rădăcina triplă trebuie să anuleze $P'(z)$ și $P''(z)$ și să nu anuleze $P'''(z)$.

$$P'(z) = 4z^3 - 33z^2 + 84z + m, \quad P''(z) = 12z^2 - 66z + 84,$$
$$P'''(z) = 24z - 66.$$

Ecuația $P''(z) = 0$ are rădăcinile 2 și $\frac{7}{2}$, deci rădăcina triplă nu poate fi decît unul din aceste numere. Niciunul din ele nu anulează $P'''(z)$, deci rădăcina va fi strict triplă.

a) Înlocuim z prin 2 în $P'(z)$ și $P(z)$. Sistemul

$P'(2) = 68 + m = 0$, $P(2) = 96 + 2m + n = 0$, dă

$$m = -68, \quad n = 40.$$

Ecuația este

$$P(z) = z^4 - 11z^3 + 42z^2 - 68z + 40 = 0.$$

$P(z)$ este divizibil prin $(z - 2)^3$. Facem împărțirea cu ajutorul schemei lui Horner; împărțim $P(z)$ prin $z - 2$, cîtul prin $z - 2$ și noul cît iarăși prin $z - 2$:

1	−11	42	−68	40	
1	− 9	24	−20	0	2
1	− 7	10	0		2
1	− 5	0			2

Cîtul este $z - 5$, deci rădăcina a patra este $z = 5$.

b) Repetăm procedeul punînd condiția ca rădăcina triplă să fie $\frac{7}{2}$.

$P'\left(\frac{7}{2}\right) = 0$ dă $m = -\frac{245}{4}$, $P\left(\frac{7}{2}\right) = 0$ dă apoi $n = \frac{343}{16}$. Deci ecuația este

$$z^4 - 11z^3 + 42z^2 - \frac{245}{4}z + \frac{343}{16} = 0$$

sau, dacă scăpăm de numitori,

$$16z^4 - 176z^3 + 672z^2 - 980z + 343 = 0.$$

Împărțirile se fac ca mai înainte, prin schema lui Horner și se obține $z_4 = \frac{1}{2}$.

2.4.8. **Observare.** Problema se poate rezolva cu ajutorul formulelor lui Vieta. Rădăcinile se notează cu α, α, α, β. Primele două dintre relațiile lui Vieta dau ecuațiile $3\alpha + \beta = 11$, $\alpha(\alpha + \beta) = 14$, cu soluțiile $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 5$, $\alpha_2 = \frac{7}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$. Următoarele două dintre relațiile lui Vieta dau m și n.

Se poate proceda și prin identificare: polinomul dat se identifică cu $(x - \alpha)^3 (x - \beta)$.

2.4.9. **Condiția ca ecuația $z^3 + pz + q = 0$ să aibă o rădăcină dublă.** *Să se determine condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o satisfacă numerele complexe p și q pentru ca ecuația*

$$P(z) = z^3 + pz + q = 0$$

să aibă o rădăcină dublă.

Luăm derivatele:

$$P'(z) = 3z^2 + p, \ P''(z) = 6z.$$

Numărul z este rădăcină dublă a ecuației propuse dacă și numai dacă satisface ecuațiile

$$P(z) = z^3 + pz + q = 0 \qquad (1)$$

$$P'(z) = 3z^2 + p = 0 \qquad (2)$$

iar

$$P''(z) = 6z \neq 0. \qquad (3)$$

Presupunem $p \neq 0$. Atunci ecuația (2) nu admite rădăcina $z = 0$. Cum $P''(z)$ se anulează numai pentru $z = 0$, condiția (3) este îndeplinită și rămîne să găsim condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă o rădăcină comună.

Înmulțim* ecuația (1) cu 3, ecuația (2) cu $(-z)$ și le adunăm. Obținem ecuația

$$Q(z) = 3P(z) - zP'(z) = 2pz + 3q = 0. \qquad (4)$$

Condiția ca ecuațiile (1) și (2) să aibă o rădăcină comună este echivalentă cu condiția ca ecuațiile (2) și (4) să aibă o rădăcină comună.

---

* Recurgem la acest artificiu pentru a evita calculul cu $\sqrt{-\frac{p}{3}}$, care reprezintă două numere complexe.

În adevăr, fie α o rădăcină comună ecuațiilor (1) și (2), adică $P(\alpha) = 0$ și $P'(\alpha) = 0$. Înlocuind în (4) z prin α, obținem

$$Q(\alpha) = 3P(\alpha) - \alpha P'(\alpha).$$

Deoarece ambii termeni, $3P(\alpha)$ și $\alpha P'(\alpha)$ sînt nuli, $Q(\alpha) = 0$, adică α satisface și ecuația (4). Reciproc, să presupunem că α ar fi o rădăcină comună ecuațiilor (2) și (4), adică

$$P'(\alpha) = 0 \text{ și } 3P(\alpha) - \alpha P'(\alpha) = 0.$$

Dacă ținem seama de prima dintre aceste relații, a doua se reduce la $3P(\alpha) = 0$, adică $P(\alpha) = 0$, deci α satisface și ecuația (1).

Acum trebuie găsită condiția ca ecuațiile (2) și (4) să aibă o rădăcină comună, ceea ce este foarte ușor. Ecuația (4) are o singură rădăcină, $z = -\frac{3q}{2p}$ (am presupus că $p \neq 0$). Deci, ecuațiile (2) și (4) admit o rădăcină comună dacă și numai dacă această valoare a lui z satisface ecuația (1). Înlocuirea dă

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Aceasta este condiția căutată.

Rămîne să examinăm cazul $p = 0$. În acest caz, ecuațiile și derivatele sînt:

$$P(z) = z^3 + q = 0,\ P'(z) = 3z^2 = 0,\ P''(z) = 6z = 0,$$
$$P'''(z) = 6 \neq 0.$$

Ecuațiile $P'(z) = 0$, $P''(z) = 0$ au rădăcina $z = 0$, și $P(0) = q$. Dacă $q = 0$, ecuația admite rădăcina triplă $z = 0$ (ceea ce se vede și direct, căci în acest caz ecuația este $z^3 = 0$), iar dacă $q \neq 0$, ecuația are numai rădăcini simple — în nici un caz ea nu are o rădăcină dublă.

Așadar, ecuația $z^3 + pz + q = 0$ are o rădăcină dublă dacă și numai dacă

$$4p^3 + 27q^2 = 0, \qquad p \neq 0.$$

2.4.10. Exemplu. În cazul ecuației

$$P(z) = z^3 + 3z - 2i = 0$$

avem $p = 3$, $q = -2i$,

$$4p^3 + 27q^2 = 4 \cdot 3^3 + 27 \cdot (-2i)^2 = 108 - 108 = 0.$$

Derivata,

$$3z^2 + 3 = 0,$$

are rădăcinile $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Unul din aceste două numere este rădăcina dublă. Calculăm $P(i)$:

$$P(i) = i^3 + 3i - 2i = -i + 3i - 2i = 0.$$

Deci i este rădăcina dublă (nu mai calculăm $P(-i)$, căci ecuația fiind de gradul III, nu poate avea două rădăcini duble). Rădăcina a treia se află prin schema lui Horner:

1	0	3	$-2i$	
1	i	2	0	i
1	$2i$	0		i

Ecuația rămasă este $z + 2i = 0$ și dă $z = -2i$. Rădăcinile ecuației inițiale sînt i, i, $-2i$.

Rezumat

● Valoarea unui polinom $P(z)$ pentru $z = a$ este egală cu restul împărțirii polinomului prin $z - a$.

$$P(a) = R.$$

● Un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$ dacă și numai dacă numărul a este o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$.

$$[P(z) \text{ divizibil prin } z - a] \Leftrightarrow [P(a) = 0].$$

● Orice ecuație algebrică $P(z) = 0$ de gradul $n > 0$ are cel puțin o rădăcină în C.

$$\forall P(z), \exists z_1, \ z_1 \in C \text{ astfel încît } P(z_1) = 0.$$

● Orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari. Această descompunere este unică.

● O ecuație algebrică de gradul n are n rădăcini, fiecare rădăcină multiplă fiind socotită ca atîtea rădăcini cît arată ordinul ei de multiplicitate.

● Între coeficienţii ecuaţiei

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

şi rădăcinile ei $z_1, z_2, \dots, z_n$ există relaţiile

$$(V)\quad z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_1}{a_0},\ z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}z_n = \frac{a_2}{a_0},\ \dots$$

Reciproc, fiind dată ecuaţia $P(z) = 0$, dacă numerele $z_1, z_2, \dots, z_n$ satisfac relaţiile (V), ele sînt rădăcinile ecuaţiei.

○ Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuaţiei algebrice $P(z) = 0$ dacă şi numai dacă $P(z)$ este divizibil prin $(z - a)^k$, iar cîtul $P(z) : (z - a)^k$ nu se anulează pentru $z = a$.

Un număr a este rădăcină multiplă de ordinul k a unei ecuaţii algebrice $P(z) = 0$ dacă şi numai dacă el anulează polinomul $P(z)$ şi primele sale $k - 1$ derivate, şi nu anulează derivata de ordinul k.

[a răd. mult. k $P(z) = 0$] $\Leftrightarrow$ [$P(a) = 0,\ P'(a) = 0, \dots$
$\dots P^{k\ 1}(a) = 0,\ P_{(k)}(a) \neq 0$].

EXERCIŢII

TEOREMA LUI BÉZOUT

1. Să se rezolve ecuaţiile următoare cunoscînd cîte o rădăcină:

a) $3z^3 + 4z^2 + 5z - 6 = 0,\ z_1 = \frac{2}{3}$;

b) $z^5 - 3z^4 - 3z^3 + 9z^2 - 4z + 12 = 0,\ z_1 = 3$.

2. Să se rezolve ecuaţiile următoare, cunoscînd cîte două rădăcini:

a) $2z^4 - 3z^3 - z^2 - 3z + 2 = 0$; $z_1 = 2,\ z_2 = \frac{1}{2}$;

b) $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$; $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

3. Să se demonstreze, pe baza teoremei lui Bézout (2.1.3), că: a) Oricare ar fi numărul natural n, $z^n - a^n$ este divizibil prin $z - a$. b) Dacă n este un număr natural impar, $z^n + a^n$ este divizibil prin $z + a$. c) Dacă n este un număr natural par, $z^n - a^n$ este divizibil prin $z + a$ și prin $z - a$.

4. Să se demonstreze că, dacă m este divizibil prin $n(m, n, \in N)$, $z^m - 1$ este divizibil prin $z^n - 1$.

5. Să se demonstreze teorema lui Bézout folosind schema lui Horner. (Se poate lua cazul unui polinom de gradul IV, $a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$.)

6. a) Să se verifice, efectuînd înmulțirea, că binomul de forma $a^n - b^n$, $n \in N$, se descompune după formula

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Să se scrie această identitate pentru cazurile $n = 3$ și $n = 4$. Binomul $a^n - b^n$ este divizibil prin $a - b$? b) Fie un polinom oarecare

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$$

și c o valoare oarecare a lui z. Atunci

$$P(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a^n.$$

Să se calculeze diferența $P(z) - P(c)$; să se grupeze termenii în perechi, să se scoată factorii comuni a_0, a_1 etc. și să se demonstreze astfel partea a doua a teoremei lui Bézout.

7. Să se demonstreze că restul împărțirii unui polinom $P(z)$ prin $az + b$ este $P\left(-\frac{b}{a}\right)$. Să se facă proba pe un exemplu numeric.

8. Fie $C(z)$ și $R(z)$, respectiv, cîtul și restul împărțirii polinomului $A(z)$ prin polinomul $B(z)$. Să se demonstreze că dacă a este o rădăcină a polinomului $B(z)$, atunci $A(a) = R(a)$.

9. Propoziția: „$P(z)$ fiind un polinom dacă, $P(a) \neq 0$, atunci $P(z)$ nu este divizibil prin $z - a$“ este adevărată?

10. a) Există în cazul numerelor naturale o teoremă analogă cu cea de la 2.1.6? b) Să se demonstreze că, dacă un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$, $z - b$ și $z - c$, el este divizibil prin $(z - a)(z - b)(z - c)$.

11. Să se demonstreze pe baza teoremei lui Bézout (partea întîi) unicitatea cîtului și a restului pentru cazul cînd împărțitorul este de forma $z - a$.

DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI LINIARI, NUMĂRUL RĂDĂCINILOR UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

12. a) Se consideră mulțimea M formată din toate numerele întregi și fracțiile cu numitorul $10^n, n \in N$. Ce condiție trebuie să satisfacă numerele întregi a și b pentru ca ecuația $ax = b$ să aibă o soluție în M? b) Se consideră mulțimea

$Q(\sqrt{2})$ formată din toate numerele de forma $a + b\sqrt{2}$ unde $a, b \in Q$. Ce condiţie trebuie să îndeplinească numerele raţionale a, b, c pentru ca ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ să admită cel puţin o soluţie în $Q(\sqrt{2})$?

13. Să se rezolve ecuaţia $|x| + |x + 1| = 0$. Este rezultatul în contradicţie cu teorema fundamentală a algebrei?

14. Teorema fundamentală a algebrei rămîne valabilă şi în cazul ecuaţiei $P^* = 0$ unde P^* este polinomul nul?

15. Să se refacă demonstraţia teoremei cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari (2.2.4) pe cazul polinomului de gradul IV.

16. Dacă înmulţim n factori liniari, obţinem un polinom de gradul n. Reciproca acestei propoziţii este adevărată? Pe baza cărei teoreme?

17. Un polinom $P(z)$ este divizibil prin $z - a$. Sîntem siguri că în descompunerea polinomului în factori liniari apare factorul $z - a$?

18. Să se demonstreze că dacă $b^2 - 4ac < 0$, trinomul $ax^2 + bx + c$, $a, b, c, \in R$ nu poate fi descompus în factori reali.

În general, dacă o ecuaţie algebrică $P(x) = 0$ are măcar o singură rădăcină imaginară, polinomul $P(x)$ nu poate fi descompus în factori liniari reali.

19. Să se rezolve ecuaţia $|x^2 - 4| = 2$. Se obţin patru soluţii. Este acest fapt în contradicţie cu teorema cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice?

20. În demonstraţia teoremei cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice intervine propoziţia: Un produs de două numere este egal cu zero numai dacă măcar unul din factori este egal cu zero? Dacă această propoziţie n-ar fi adevărată, s-ar putea ca o ecuaţie de gradul n să aibă mai mult ca n rădăcini?

21. a) De ce se pune în enunţul teoremei fundamentale a algebrei (2.2.2) condiţia $n > 0$?

b) Această menţiune mai este necesară în cazul teoremei cu privire la numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice (2.2.8)?

22. Pentru cîte valori ale lui z ia un polinom de gradul n, $P(z)$, aceeaşi valoare a?

23. a) Se dau două polinoame: $P_3(z)$, de gradul III, şi $P_4(z)$, de gradul IV. Pentru cîte valori ale lui z iau aceste polinoame aceeaşi valoare? b) Aceeaşi întrebare dacă gradele celor două polinoame sînt m şi n, $m > n$. c) Aceeaşi întrebare dacă polinoamele sînt de acelaşi grad n.

24. Se dau polinoamele: $P(x)$ de gradul m, $Q(x)$ de gradul n, amîndouă cu coeficienţi reali, şi se consideră funcţiile definite de ele pentru $x \in R$. Cîte puncte comune au graficele lor?

25. Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $A(x)$ şi $B(x)$ şi produsul lor $P(x) = A(x)B(x)$. Fiecare dintre aceste polinoame defineşte o funcţie pentru $x \in R$. Fie, respectiv, S_A, S_B şi S_P mulţimea punctelor de intersecţie a graficelor acestor funcţii cu axa Ox. Ce relaţie există între aceste mulţimi?

26. Care este ordinul de multiplicitate maxim pe care îl poate avea o rădăcină a unei ecuații algebrice de gradul n? Să se dea exemple.

27. Să se descompună în factori liniari polinoamele

a) $2z^2 - 3z + 1$; b) $3z^2 - 2az + 5a^2$;

c) $z^2 - 3iz - 2$; d) $2z^2 - (3 + 2i)z + i + 1$;

e) $4z^4 - 5z^2 + 1$; f) $z^4 - 1$.

28. Să se demonstreze că fracțiile următoare sînt ireductibile. Se poate face demonstrația fără teorema cu privire la unicitatea descompunerii unui polinom în factori liniari?

a) $\dfrac{z^4 - (1 + i)\, z^2 + i}{z^2 - 4}$; b) $\dfrac{z^3 - 8}{z^2 - 4z + 3}$.

29. Să se formeze ecuațiile de grad minim care au rădăcinile următoare

a) $\frac{2}{3}$, 1 și $\frac{1}{2}$; b) 1, i și 2i;

c) $2 + 3\sqrt{5}$; $2 - 3\sqrt{5}$ și 1. d) 1, 3, $1 + i$ și $1 - i$;

e) rădăcina dublă 2 și rădăcinile simple -3 și 1;

f) rădăcina triplă 1, rădăcina dublă i și rădăcina simplă $-i$.

30. a) Să se formeze o ecuație de gradul 100, care să aibă rădăcinile $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$. b) Să se formeze o ecuație de gradul III care să aibă rădăcinile: $1, -1$; 0 și 3.

31. a) O ecuație algebrică cu coeficienți complecși $P(z) = 0$ poate avea numai rădăcini reale? Să se dea exemple. Care este condiția necesară și suficientă? b) Invers, se poate ca o ecuație algebrică cu coeficienți reali să aibă numai rădă- complexe? Să se dea exemple.

32. Se consideră ecuațiile:

a) $(z - i)(z + 1)^3(z - 2\sqrt{3})^2 = 0$; b) $(z + 1)^3(z - 1)^3(z - 6)^3 = 0$.

Care sînt rădăcinile lor? Ce ordin de multiplicitate are fiecare dintre ele?

33. a) Să se indice un polinom $P(z)$ de gradul zece care să se anuleze pentru aceleași valori ale lui z ca polinomul $Q(z) = z^2 + z - 2$. b) Se poate găsi un polinom de gradul VII care să îndeplinească aceeași condiție? Cîte astfel de polinoame există? c) Generalizare pentru cazul cînd se cere un polinom $P(z)$ de gradul p.

34. Se consideră ecuațiile $P(z) = 0$ și $Q(z) = 0$. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_m$ rădăcinile primei ecuații, care se presupun distincte, și $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+n}$ rădăcinile ecuației a doua, de asemenea distincte și diferite de rădăcinile primei ecuații. a) Care sînt rădăcinile ecuației $P(z) \cdot Q(z) = 0$? b) Ce se întîmplă dacă cele două ecuații au rădăcini comune? c) Care este situația dacă un număr z_i este rădăcină multiplă de ordinul p a uneia dintre ecuațiile date, și de ordinul q pentru cealaltă?

35. Să se determine p și q astfel ca ecuațiile următoare să aibă aceleași rădăcini:

a) $x^4 + (2p - q)x^3 + (p + q)x^2 + (p - q)x + 2p + q + 1 = 0$ și

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0;$$

b) $px^3 + (p + q + r)x^2 + (p - q - r)x + q - r = 0$ și

$$3x^3 + 4x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Să se explice de ce în cazul *b*) nu se obține rezultatul așteptat.

36. Două ecuații algebrice au aceleași rădăcini și una dintre puterile lui x are în ambele ecuații același coeficient. Ce se poate spune despre ceilalți coeficienți?

37. Se poate ca două polinoame de grade diferite să se anuleze pentru aceleași valori ale necunoscutelor? Să se dea exemple. Este acest lucru în contradicție cu teorema de la 2.2.12?

38. a) Este posibil ca produsul a două polinoame să fie o constantă (un polinom constant)? Demonstrație.

b) $P(z)$ și $Q(z)$ fiind două polinoame, să se demonstreze că, dacă $P(z)$ este divizibil prin $Q(z)$ și $Q(z)$ este divizibil prin $P(z)$, cele două polinoame diferă printr-un factor constant.

c) Există ceva analog în cazul numerelor naturale?

FORMULELE LUI VIETA

39. Să se scrie relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației de gradul V, $a_0z^5 + a_1z^4 + a_2z^3 + a_3z^2 + a_4z + a_5 = 0$.

40. a) Cîți termeni conțin partea stîngă a fiecăreia dintre relațiile lui Vieta în cazul ecuației de gradul VI? în cazul ecuației de gradul n?

b) Cîți termeni conține partea stîngă a relației lui Vieta de rang p în cazul ecuației de gradul n?

41. Să se verifice formulele lui Vieta în cazul ecuațiilor a) $z^3 - 1 = 0$; b) $z^3 + 1 = 0$; c) $z^4 - 1 = 0$;

42. Să se formeze pe baza formulelor lui Vieta ecuațiile care au rădăcinile următoare și să se facă proba cu ajutorul schemei lui Horner:

a) $-2, 1, 3$ și 4; b) $i, 1 + i, 1$ și -2.

Se aplică teorema lui Vieta sau reciproca? Ecuațiile se pot forma și pe baza teoremei cu privire la descompunerea unui polinom în factori liniari (2.2.11). Care din aceste procedee este mai practic? Care din ele este anterior și care este derivat?

43. $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ și $\operatorname{tg} \gamma$ sînt rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Să se calculeze $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma)$.

44. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este a, aria sa totală este s iar volumul său este v. Să se scrie ecuația de gradul III care are ca rădăcini dimensiunile paralelipipedului.

45. Să se rezolve ecuațiile următoare știind că între rădăcinile lor există relația indicată. Se va verifica că între rădăcinile aflate există acea relație.

a) $3z^3 + 7z^2 - 18z + 8 = 0,\ z_1 + z_2 = -3;$
b) $z^3 - (5 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 5\sqrt{3})z + 6\sqrt{3} = 0,\ z_1 + z_2 = 5;$
c) $5z^3 - 27z^2 + 7z + 15 = 0,\ z_1z_2 = 5;$
d) $2z^3 - 3(1 + 2i)z^2 - (4 - 9i)z + 6 = 0,\ z_1z_2 = 3i;$
e) $z^3 - 7z^2 + 4z + 12 = 0,\ z_1 = 3z_2;$
f) $z^3 - 10iz^2 - 27z + 18i = 0,\ z_1 = 2z_2;$
g) $9z^3 - 18az^2 + 11a^2z - 2a^3 = 0,\ z_1 + z_2 = z_3;$
h) $z^3 - (1 + 4i)z^2 - (5 - 3i)z + 2(1 + i) = 0;\ z_1 - z_2 = 1;$
i) $z^3 - 13az + 12a^3 = 0,\ z_1 - z_2 = 2a;$
j) $z^3 - a(a^2 + a + 1)z^2 + a^3(a^2 + a + 1)z - a^6 = 0,\ z_1 = z_2z_3;$
k) $z^3 - 10z^2 + 27z - 18 = 0,\ z_1 = 2z_2z_3.$

46. Aceeași problemă în legătură cu ecuațiile următoare:

a) $z^4 - 4z^3 - z^2 + 10z + 4 = 0,\quad z_1z_2 = -1;$
b) $z^4 - (5 + i)z^3 + 5(1 + i)z^2 + (3 - 5i)z - 3i = 0,\quad z_1z_2 = 3i;$
c) $z^4 + 12z - 5 = 0,\ z_1 + z_2 = 2;$
d) $2z^4 - 12az^3 + 15a^2z^2 + 9a^3z - 20a^4 = 0,\ z_1 + z_2 = 3a;$
e) $z^4 - z^2 + 12z - 36 = 0,\ z_1z_2 = -z_3z_4;$
f) $z^4 - (4 + 5i)z^3 - 4(3 - 5i)z^2 + 6(4 + 5i)z + 36 = 0,\ z_1z_2 = z_3z_4.$

47. Să se determine în ecuațiile următoare parametrul m astfel încît între rădăcini să existe relația indicată în dreptul fiecăreia și să se rezolve.

a) $4z^3 + 20z^2 + mz - 15 = 0,\ z_1 + z_2 = z_3;$
b) $z^3 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})z^2 + (5 + 3\sqrt{6})z + m = 0,\ z_1 + z_2 = z_3;$
c) $2z^3 - 3z^2 - (m + 10)z + m + 5 = 0,\ z_1 + z_2 = 1;$
d) $3z^3 - (3m + 1)z^2 + (5m - 2)z - 6 = 0,\ z_1z_2 = 1;$
e) $z^4 - 2z^3 - 6z^2 + mz - 3 = 0,\ z_1z_2 = 3;$
f) $z^4 - 8z^3 + mz^2 - 19z + 6 = 0,\ z_1 + z_2 = 5;$
g) $z^3 - 7z^2 + 7z + a = 0,\ z_1^2 + z_2^2 = 10;$
h) $z^3 - 12z^2 + az - 60 = 0,\ z_1^2 = z_2^2 + z_3^2.$

48. Să se rezolve ecuațiile următoare și să se determine parametrul real a, știind că între rădăcinile lor există relația $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$.
a) $z^4 + az^3 + 8z + 3 = 0;$
b) $z^4 - 2(3 + i)z^3 + az^2 - 2(1 + 7i)z - 3(1 - 2i) = 0.$

49. Să se rezolve ecuația

a) $4z^4 - 8z^3 + mz^2 + 4z + n = 0;$
b) $z^4 - 2(1 + i)z^3 + 4iz^2 + mz + n = 0,$
știind că are două rădăcini duble și să se determine m și n.

50. Se consideră ecuaţia

$$z^3 + (m - n)z^2 + (2m - 3n)z + m + 3n = 0.$$

Să se determine m şi n şi să se rezolve, ştiind că una dintre rădăcinile ei este 2, iar suma celorlalte două rădăcini este zero.

51. Se consideră ecuaţia

$$z^4 - 7z^3 + mz^2 + 7z + n = 0.$$

Să se rezolve şi să se determine m şi n, ştiind că ea admite rădăcina 2 şi suma a două dintre celelalte rădăcini este zero.

52. Se consideră ecuaţia

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0.$$

Să se determine condiţia necesară şi suficientă pe care trebuie să o îndeplinească coeficienţii a, b, c şi d, pentru ca între rădăcinile ei să existe relaţia de mai jos. Se va construi în fiecare caz cîte un exemplu numeric, adică o ecuaţie cu coeficienţi numerici care să satisfacă condiţia găsită, ecuaţia se va rezolva şi se va verifica că între rădăcini există relaţia dată.

a) $z_1 + z_2 = 0$; b) $z_1 z_2 = 1$;
c) $z_1 = z_2 + z_3$; d) $z_1 + z_3 = 2z_2$;
e) $z_2 = 2z_1$, $z_3 = 3z_1$.

53. Aceeaşi problemă în legătură cu ecuaţia

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0,$$

relaţia dintre rădăcini fiind

a) $z_1 + z_2 = 0$; b) $z_1 z_2 = z_3 z_4$;
c) $z_1 = z_2$, $z_3 = z_4$; d) $z_1 + z_2 = z_3 z_4$, $z_3 + z_4 = z_1 z_2$;
e) $z_2 = 2z_1$, $z_4 = 2z_3$.

54. Se ştie că rădăcinile ecuaţiei bipătrate

$$az^4 + bz^2 + c = 0$$

sînt opuse două cîte două. Să se demonstreze că, reciproc, dacă rădăcinile unei ecuaţii de gradul IV sînt opuse două cîte două, acea ecuaţie este bipătrată.

55. Ce relaţie trebuie să existe între numerele complexe a, b, c pentru ca sistemul

$$x + y + z = a, \quad xy + xz + yz = b, \quad xyz = c$$

să fie compatibil?

56. Se consideră sistemele

$$x + y + z = p, \quad xy + xz + yz = q, \quad xyz = r$$

şi

$$x + y + z + u = a, \quad xy + xz + xu + yz + yu + zu = b$$
$$xyz + xyu + xzu + yzu = c, \quad xyzu = d.$$

Se dă că între soluţiile lor există legătura următoare: dacă (x_1, y_1, z_1) este o soluţie a primului sistem, atunci există un număr u_1 astfel ca (x_1, y_1, z_1, u_1) să fie o soluţie a sistemului al doilea. Ce relaţie există în acest caz între numerele p, q, r; a, b, c, d?

57. Se consideră ecuaţia

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (1)$$

şi rădăcinile ei, α, β, γ, pe care le presupunem simple. Problema de a rezolva această ecuaţie este echivalentă cu problema de a rezolva sistemul

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}. \qquad (2)$$

Or, ecuaţia (1) are 3 soluţii, $z = \alpha$, $z = \beta$ şi $z = \gamma$, pe cînd sistemul (2) are 6 soluţii, căci gradele celor trei ecuaţii sînt, respectiv 1, 2 şi 3 $(1 \cdot 2 \cdot 3 = 6)$. Este aceasta o contradicţie reală? Pentru orientare, se poate examina în prealabil cazul ecuaţiei de gradul II, de exemplu $z^2 - 4z + 3 = 0$. Să se trateze aceeaşi chestiune pentru ecuaţia de gradul IV.

58. Să se încerce să se rezolve ecuaţia de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, rezolvînd sistemul $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Ce se constată? (v. cap. I, probl. 21.)

Pentru a arăta că şi încercarea analogă în cazul ecuaţiei de gradul III, $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, duce la un cerc vicios, se poate proceda astfel: se scriu cele trei relaţii ale lui Vieta şi, pentru a elimina x_2 şi x_3, se înmulţeşte prima cu x_1^2, a doua cu $(-x_1)$, iar a treia cu 1 şi se adună. Ce se constată? Dar dacă se elimină printr-un procedeu asemănător x_1 şi x_3? x_1 şi x_2? Să se demonstreze că şi în cazul ecuaţiei de gradul IV acest procedeu duce la un cerc vicios.

RĂDĂCINI MULTIPLE*

59. Să se verifice că ecuaţiile următoare au cîte o rădăcină dublă şi să se rezolve

a) $27z^3 - 36z + 16 = 0$;
b) $z^3 - 9z + 6\sqrt{3} = 0$;
c) $z^3 - 3(3 + 4i)z + 2(2 + 11i) = 0$;
d) $z^3 - 6iz - 4 + 4i = 0$.

60. Să se verifice că ecuaţiile următoare au cîte o rădăcină triplă şi să se rezolve.

a) $3z^4 - 17az^3 + 30a^2z^2 - 12a^3z - 8a^4 = 0$;
b) $z^4 - 2iz^3 - 2iz - 1 = 0$;
c) $z^4 - (7 + 3\sqrt{5})z^3 + 3(11 + 5\sqrt{5})z^2 - (65 + 29\sqrt{5})z + 38 + 17\sqrt{5} = 0$.

---

* Problemele 59—67 se pot rezolva şi prin identificare (2.4.8) sau cu ajutorul formulelor lui Vieta.

61. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare, parametrul a astfel încît ecuația să admită ca rădăcină *dublă* numărul indicat în dreptul ei și să se rezolve.

a) $z^3 + az^2 + bz + 18 = 0$, $z_1 = z_2 = 3$;

b) $4z^3 - 4(1 - i)z^2 + bz + c = 0$, $z_1 = z_2 = \frac{1}{2}$;

c) $z^4 + mz^3 + 17z^2 - 17z + n = 0$, $z_1 = z_2 = 1$.

62. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare parametrul a astfel încît ecuațiile următoare să aibă cîte o rădăcină *dublă* și să se rezolve. La exercițiile a) și b) se va folosi și rezultatul de la 2.4.9.

a) $4z^3 - 3z + a = 0$; b) $z^3 + 3z + a = 0$; c) $4z^3 + 8z^2 - 11z + a = 0$.

63. Să se determine în fiecare dintre ecuațiile următoare coeficienții necunoscuți astfel încît ecuația să aibă o rădăcină *triplă* și să se rezolve.

a) $z^4 - 6z^3 + 12z^2 + az + b = 0$;
b) $z^4 + z^3 + az + b = 0$;
c) $z^4 - 6z^2 + az + b = 0$.

64. Să se determine coeficienții p, q și r astfel încît ecuația

$$P(z) = z^4 - 5z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

să aibă rădăcina triplă $z = 2$ și să se rezolve.

65. Să se determine coeficienții a, b și c astfel încît ecuația

$$P(z) = 4z^5 + az^4 - 27z^3 + bz^2 + 69z + c = 0$$

să aibă rădăcinile duble $z_1 = z_2 = -3$ și $z_3 = z_4 = \frac{1}{2}$ și să se rezolve.

66. Ce condiție trebuie să satisfacă coeficienții ecuației

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

pentru ca ecuația să admită o rădăcină triplă? Să se afle rădăcina.

67. Să se determine p și q astfel încît ecuația $z^3 + pz + q = 0$ să admită rădăcina dublă $z = p$.

68. Să se refacă demonstrația teoremei de la 2.4.6 pentru cazul unei rădăcini triple.

69. Ce este greșit în enunțul următor: numărul a este o rădăcină triplă a ecuației algebrice $P(z) = 0$ dacă anulează $P'(z)$ și $P''(z)$.

70. Numărul $x = 0$ satisface ecuația $f(x) = \sin^2 x \cos x = 0$ și derivata $f'(x) = 0$. Se poate spune că $x = 0$ este o rădăcină dublă a ecuației $f(x) = 0$?

71. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ rădăcinile ecuației algebrice $P(z) = 0$; toate rădăcinile fiind simple. Care sînt rădăcinile ecuației

$$[P(z)]^2 = 0, \qquad [P(z)]^k = 0, \; k \in N?$$

72. Să se demonstreze că dacă o ecuație de gradul IV are două rădăcini duble; $z_1 = z_2 = a$; $z_3 = z_4 = b$, derivata admite rădăcina $z = \frac{a+b}{2}$. Generalizare pentru cazul unei ecuații de gradul $2n$ care admite două rădăcini multiple de ordinul n.

73. Care este condiția ca ecuația cu coeficienți reali

$$x^3 + px + q = 0$$

să admită o rădăcină dublă reală. Ce relație există între semnul lui q și semnul rădăcinii duble?

74. Un polinom poate fi divizibil prin derivata sa? Să se examineze în special cazul polinomului de gradul II.

75. Să se regăsească pe baza teoremei de la 2.4.6 condiția ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să aibă o rădăcină dublă.

76. Se consideră o ecuație algebrică cu coeficienți reali $P(x) = 0$ și curba $y = P(z)$. Fie $x = a$ o rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației. Ce poziție are curba față de axa Ox în vecinătatea punctului de abscisă $x = a$?

77. Care dintre teoremele din acest capitol se bazează, direct sau indirect, pe teorema lui Bézout?

ECUAȚII CU COEFICIENȚI ÎN Z_n*

78. 1) Să se efectueze împărțirile următoare (coeficienții aparțin claselor de resturi indicate). 2) Să se examineze dacă demonstrația de la 1.3.3. este valabilă în cazurile a) și b), în care împărțitorul este de forma $x - a$, precum și în cazurile c) și d), avînd în vedere că în Z_6 și Z_{12} există divizori ai lui zero.

a) $(\widehat{2}x^3 + x^2 + \widehat{3}x + \widehat{1}) : (x + \widehat{4}) \ldots Z_5$;

b) $(x^3 + \widehat{4}x^2 + \widehat{3}x + 1) : (x + \widehat{2}) \ldots Z_6$;

c) $(\widehat{2}x^2 + \widehat{2}x + \widehat{1}) : (\widehat{2}x + 1) \ldots Z_6$;

d) $(\widehat{6}x^2 + \widehat{7}x + \widehat{4}) : (\widehat{3}x + \widehat{2}) \ldots Z_{12}$.

79. Teorema lui Bézout este valabilă în cazul polinoamelor cu coeficienți din Z_n? Verificare pe primele două exemple din problema precedentă.

80. Se consideră ecuațiile următoare:

a) $\widehat{2}x^2 + \widehat{1} = \widehat{0} \ldots Z_3$;

b) $\widehat{2}x^3 + x + \widehat{2} = \widehat{0} \ldots Z_5$;

c) $x^2 + x = \widehat{0} \ldots Z_6$;

d) $x^2 + \widehat{2}x = \widehat{0} \ldots Z_8$;

e) $x^2 + \widehat{3}x = \widehat{0} \ldots Z_{10}$;

f) $x^2 + \widehat{7}x + \widehat{6} = \widehat{0} \ldots Z_{12}$.

* Aceste exerciții se pot face numai dacă s-a făcut în prealabil ultima grupă de exerciții (34—38) de la capitolul I.

1) Să se rezolve, încercînd toate elementele din mulţimea de definiţie.

2) Teorema de 2.2.8. se poate aplica la ecuaţii algebrice cu coeficienţi din Z_n?

3) Faptul că numărul rădăcinilor unei ecuaţii algebrice nu poate să întreacă gradul ecuaţiei se demonstrează şi la 1.2.3. De ce nu se adevereşte această propoziţie în cazul ecuaţiilor c)—f)?

4) Să se descompună fiecare dintre aceste două polinoame în factori, liniari folosind teorema lui Bézout. Teorema de la 2.2.7 mai este valabilă în toate cazurile? De ce?

5) În ecuaţiile c), d) şi e), după ce s-a făcut descompunerea $x^2 + \widehat{a}x = x(x + \widehat{a})$, de ce nu se poate trage concluzia că ecuaţia are numai rădăcinile $x = \widehat{0}$ şi $x = \widehat{n - a}$?

CAPITOLUL III

ECUAŢII CU COEFICIENŢI REALI, RAŢIONALI, ÎNTREGI

3.0. INTRODUCERE

În primele două capitole am tratat polinoame şi ecuaţii algebrice foarte generale, cu coeficienţi complecşi. Deoarece $R \subset C$, $Q \subset C$, $Z \subset C$, tot ce s-a spus pînă acum rămîne adevărat şi în cazul polinoamelor şi ecuaţiilor cu coeficienţi reali, raţionali, sau chiar întregi, dacă necunoscuta (variabila) ia valori complexe.

În acest capitol vom restrînge treptat mulţimea căreia îi aparţin coeficienţii ecuaţiilor: vom da întîi o proprietate a ecuaţiilor cu coeficienţi reali, apoi o proprietate a ecuaţiilor cu coeficienţi raţionali şi, în sfîrşit, ne vom ocupa de ecuaţiile cu coeficienţi întregi. Propoziţiile pe care le vom stabili nu mai sînt adevărate în cazul ecuaţiilor ai căror coeficienţi aparţin unei mulţimi mai cuprinzătoare. Astfel, teorema pe care o vom demonstra pentru ecuaţiile cu coeficienţi reali nu mai este adevărată dacă coeficienţii ecuaţiei sînt complecşi, teorema pe care o vom demonstra pentru ecuaţiile cu coeficienţi raţionali nu mai este adevărată pentru ecuaţii cu coeficienţi reali ş.a.m.d.

3.1. RĂDĂCINILE IMAGINARE ALE UNEI ECUAŢII ALGEBRICE CU COEFICIENŢI REALI

3.1.1. Cazul ecuaţiei de gradul II. Se ştie că dacă ecuaţia de gradul II, $ax^2 + bx + c = 0$, cu coeficienţi reali admite rădăcina $m + ni$, unde m, $n \in R$, ea admite şi rădăcina $m - ni$; de asemenea, dacă

o ecuaţie de gradul II cu coeficienţi raţionali admite rădăcina $m + n\sqrt{p}$ unde $m, n \in Q$ şi p nu este pătrat perfect, ea admite şi rădăcina $m - n\sqrt{p}$.

Exemple. a) $x^2 - 6x + 13 = 0$, $x_1 = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$;
b) $x^2 + 8x - 29 = 0$, $x_1 = -4 + 3\sqrt{5}$ $x_2 = -4 - 3\sqrt{5}$.

Aceasta se explică elementar prin formula de rezolvare, pe care o scriem sub forma

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dacă toţi coeficienţii ecuaţiei sînt reali şi $b^2 - 4ac < 0$; ecuaţia are două rădăcini imaginare. Dar ambele rădăcini au aceeaşi parte reală, $-\frac{b}{2a}$, iar părţile imaginare sînt $+\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i$ şi $-\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}i$.

În mod analog se arată că, dacă toţi coeficienţii ecuaţiei sînt raţionali, ambele rădăcini au aceeaşi parte raţională, $-\frac{b}{2a}$, iar părţile iraţionale au aceeaşi valoare absolută, dar semne contrare.

Acest lucru este adevărat oricare ar fi gradul ecuaţiei, dar demonstraţia se face prin alte consideraţii, căci nu mai dispunem de o formulă de rezolvare.

Menţionăm că cele arătate sînt adevărate numai dacă coeficienţii ecuaţiei sînt *reali*, respectiv *raţionali*.

3.1.2. **Numere imaginar conjugate.** a) Fiind dat numărul complex

$$z = a + bi, \qquad a, b \in R$$

numărul

$$z = a - bi$$

se numeşte *conjugatul* lui z şi se notează cu $\bar{z}$ (z supraliniat).

Exemple: $\overline{4 + 3i} = 4 - 3i$; $\overline{5 - 11i} = 5 - (-11i) = 5 + 11i$; $\bar{3} = 3$.

Conjugatul numărului $z = a + bi$ este $\bar{z} = a - bi$, să-l notăm cu u; atunci $\bar{u} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi = z$. Aceasta înseamnă că, dacă u este conjugatul lui z, atunci z este conjugatul lui u. De aceea se poate spune că numerele $z = a + bi$ şi $\bar{z} = a - bi$ sînt ima-

ginar conjugate, în sensul că fiecare din ele este conjugatul celuilalt. Relația „este conjugat cu" este *simetrică*.

Exemplu: Conjugatul lui $3 + 7i$ este $3 - 7i$, și conjugatul lui $3 - 7i$ este $3 + 7i$; numerele $3 + 7i$ și $3 - 7i$ sînt imaginar conjugate.

b) *Conjugatul sumei.* Considerăm, de exemplu, numerele complexe

$$z = 3 + 5i \qquad \text{și} \qquad u = 2 - 7i.$$

Conjugatele lor sînt:

$$\bar{z} = 3 - 5i \text{ și} \qquad \bar{u} = 2 + 7i$$

Suma numerelor considerate este

$$z + u = 5 - 2i,$$

iar suma conjugatelor lor este

$$\bar{z} + \bar{u} = 5 + 2i.$$

S-a obținut tocmai conjugatul sumei: $\bar{z} + \bar{u} = \overline{z + u}$.

Acest fapt este general. Dacă

$$z = a + bi, \qquad u = c + di,$$

atunci

$$\bar{z} = a - bi, \qquad \bar{u} = c - di.$$

Suma numerelor date este

$$z + u = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

iar suma conjugatelor lor este

$$\bar{z} + \bar{u} = (a - bi) + (c - di) = a + c - (b + d)i.$$

S-a obținut tocmai conjugatul lui $z + u$, adică $\overline{z + u}$.

Conjugatul sumei a două numere complexe este suma conjugatelor lor.

Simbolic,

$$\forall z, u, \quad z, u \in C \qquad \overline{z + u} = \bar{z} + \bar{u}. \qquad \text{(A)}$$

Teorema se extinde ușor asupra unei sume de mai mulți termeni.

c) *Conjugatul produsului*. Notațiile fiind cele de mai sus, să calculăm $\overline{zu}$ și $\bar{z} \cdot \bar{u}$.

$$zu = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$\bar{z} \cdot \bar{u} = (ac - bd) - (ad + bc)i;$$

se constată că produsul al doilea este conjugatul primului.

Conjugatul produsului a două numere complexe este produsul conjugatelor lor.

$$\forall z,\ u, \quad z,u \in C \quad \overline{zu} = \bar{z} \cdot \bar{u} \cdot \qquad \text{(I)}$$

Exemplu: Fie

$z = 3 - 5i$, $u = -7 + 2i$; deci $\bar{z} = 3 + 5i$, $\bar{u} = -7 - 2i$.
Avem:

$$zu = -11 + 41i; \qquad \bar{z} \cdot \bar{u} = -11 - 41i.$$

Rezultatele sînt conjugate.

d) *Conjugatul puterii*. Dat fiind că ridicarea la o putere cu exponent natural este o înmulțire repetată, rezultă imediat că:

Puterile naturale a două numere imaginar conjugate sînt imaginar conjugate.

$$\forall z, \quad z \in C,\ \forall n,\ n \in N\ \overline{z^n} = \bar{z}^n. \qquad \text{(P)}$$

Aceste propoziții rămîn adevărate dacă unul dintre numere este real, căci, dacă $z = a = a + 0i$, conjugatul său este $\bar{z} = a - 0i = a = z$.

3.1.3. **Funcția $\bar{z}$.** Asociind fiecărui număr complex conjugatul său, am definit o funcție $f : C \to C$, care face ca fiecărui număr complex să-i corespundă conjugatul său:

$$f(a + bi) = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Exemple: $f(2 + 3i) = 2 - 3i$, $f(1 - i) = 1 + i$, $f(i) = -i$, $f(3) = 3$.

Folosind simbolul f, cele trei propoziții demonstrate mai sus se scriu:

$$f(z + u) = f(z) + f(u),$$
$$f(zu) = f(z)f(u),$$
$$f(z^n) = [f(z)]^n.$$

Se spune că *această funcție păstrează adunarea numerelor complexe, înmulțirea numerelor complexe și ridicarea unui număr complex la o putere cu exponent natural.*

3.1.4. Valorile unui polinom pentru două valori conjugate ale variabilei. Fie $P(z)$ un polinom cu coeficienți reali. Dacă dăm variabilei o valoare complexă, polinomul ia, în general, o valoare complexă. De exemplu, în cazul

$$P(z) = 5z^2 - 3z + 4,$$

pentru $z = 2 + 3i$ și $z = 2 - 3i$, se obține

$$P(2 + 3i) = 5(2 + 3i)^2 - 3(2 + 3i) + 4 = -27 + 21i,$$
$$P(2 - 3i) = 5(2 - 3i)^2 - 3(2 - 3i) + 4 = -27 - 21i.$$

Rezultatele sînt conjugate.

Pentru a afla valoarea unui polinom pentru o valoare dată a variabilei trebuie să facem numai ridicări la putere, înmulțiri și adunări. Teoremele de la 3.1.2 ne permit să demonstrăm că ceea ce am constatat pe acest exemplu este totdeauna adevărat.

Fie polinomul

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-k}z^k + \dots + a_n, \quad a_i \in R.$$

Dacă dăm variabilei z două valori conjugate, $z = u$ și $z = \bar{u}$, obținem

$$P(u) = a_0u^n + a_1u^{n-1} + \dots + a_{n-k}u^k + \dots + a_n$$
$$P(\bar{u}) = a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \dots + a_{n-k}\bar{u}^k + \dots + a_n.$$

Trebuie să comparăm aceste două expresii. Am pus în evidență termenul general $a_{n-k}z^k$. El dă în rîndul de sus și în cel de jos respectiv

$$a_{n-k}u^k \text{ și } a_{n-k}\bar{u}^k.$$

Teorema cu privire la ridicarea la putere (P) ne arată că factorii u^k și $\bar{u}^k$ sînt conjugați. Fiecare din acești factori se înmulțește cu numărul real a_{n-k}. Deoarece coeficienții polinomului sînt reali, $\overline{a_{n-k}} = a_{n-k}$. Putem deci considera coeficientul a_{n-k} din produsul al doilea ca fiind conjugatul lui a_{n-k} din primul produs. Teorema cu privire la înmulțire (I) arată că $a_{n-k}\bar{u}^k$ este conjugatul lui $a_{n-k}u^k$. Termenul considerat fiind

oarecare, rezultă că fiecare termen din rîndul al doilea care conține u este conjugat cu termenul scris deasupra lui. Și acest lucru este valabil pentru toți termenii care conțin z. Cît despre a_n, el este conjugat cu el însuși. N-a rămas decît să adunăm în fiecare rînd termenii. Fiecărui termen din rîndul de sus îi corespunde în rîndul de jos un termen conjugat cu el. Teorema cu privire la adunare (A) ne arată că sumele vor fi conjugate. Dacă în rîndul întîi se obține rezultatul $m + ni$, în rîndul al doilea se obține $\overline{m + ni} = m - ni$.



Valorile unui polinom cu coeficienți reali pentru două valori imaginar conjugate ale variabilei sînt imaginar conjugate.

Simbolic,

$$[P(u + vi) = m + ni] \Rightarrow [P(u - vi) = m - ni]$$

sau, mai scurt:

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}.$$

3.1.5. Rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali. Cu această pregătire putem demonstra teorema anunțată la începutul acestui paragraf.

Fie

$$P(z) = 0$$

o ecuație algebrică cu coeficienți reali și $a + bi$ o rădăcină a ei,

$$P(a + bi) = 0.$$

Atunci $P(a - bi)$ va fi conjugatul lui zero, care este tot zero, deci

$$P(a - bi) = 0,$$

ceea ce înseamnă că $a - bi$ este de asemenea o rădăcină a ecuației $P(z) = 0$.



Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți reali admite rădăcina $u + vi$, ea admite rădăcina $u - vi$.

$$[P(u + vi) = 0] \Rightarrow [P(u - vi) = 0].$$

Cu alte cuvinte, *rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali sînt conjugate două cîte două.*

3.1.6. **Rezumat.** Am introdus funcţia $\bar{z}$ pentru a putea demonstra această teoremă. Demonstraţia se poate rezuma în schema următoare.

$$\underset{(P)}{[\bar{z}^k = \overline{z^k}]} \underset{(I)}{\Rightarrow} [a_{n-k}\bar{z}^k = \overline{a_{n-k}z^k}] \underset{(A)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow [P(\bar{z}) = \overline{P(z)}] \underset{\overline{(O)}}{\Rightarrow} [P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0].$$

Semnele de sub simboli arată pe ce se bazează fiecare relaţie, şi anume (P), (I) şi (A) înseamnă, respectiv, că trecerea la numărul conjugat păstrează ridicarea unui număr complex la o putere naturală, înmulţirea şi adunarea numerelor complexe, iar $\overline{(O)}$ — faptul că conjugatul lui 0 este 0.

3.1.7. **Ecuaţii cu coeficienţi numerici.**

Aplicaţii

Să se rezolve ecuaţia

$$P(x) = z^4 - 7z^3 + 24z^2 - 41z + 35 = 0$$

ştiind că admite rădăcina $2 + i\sqrt{3}$.

Ecuaţia dată avînd coeficienţi reali, admite şi rădăcina $2 - i\sqrt{3}$, deci polinomul $P(z)$ dat este divizibil prin produsul $(z - 2 - i\sqrt{3})(z - 2 + i\sqrt{3})$, care este egal cu $z^2 - 4z + 7$. Împărţind polinomul $P(z)$ prin acest trinom, se obţine cîtul $z^2 - 3z + 5$, cu rădăcinile $\frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$. Deci, rădăcinile ecuaţiei sînt: $2 \pm i\sqrt{3}$ şi $\frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

3.1.8. **Observări.** 1) Problema se mai poate rezolva identificînd polinomul $P(z)$ cu polinomul care se obţine efectuînd $(z^2 - 4z + 7)(z^2 + pz + q)$; se obţine un sistem de ecuaţii compatibil, care dă $p = -3$, $q = 5$.

2) Se poate proceda şi astfel: Polinomul dat se împarte prin $z - (2 + i\sqrt{3})$, iar cîtul prin $z - (2 - i\sqrt{3})$.

3.1.9. **Cazul cînd ecuaţia conţine parametri.** De fapt nu trebuie să cunoaştem toţi coeficienţii ecuaţiei $P(z) = 0$. De exemplu, cînd se foloseşte metoda identificării, indicată mai sus, se obţine sistemul

$$p - 4 = -7, \; -4p + q = 17, \; 7p - 4q = -41, \; 7q = 35.$$

Pentru a afla p şi q, ajung două oarecare dintre aceste ecuaţii (faptul că valorile aflate pentru p şi q satisfac şi celelalte două confirmă

că ecuaţia propusă are rădăcina dată), iar cu ajutorul celorlalte două ecuaţii se pot determina doi parametri care ar figura eventual în ecuaţie. De aceea se pot rezolva pe aceeaşi cale problemele de tipul următor:

Se dă ecuaţia:

$$z^4 + az^4 + 24z^2 + bz + 35 = 0, \text{ sau } z^4 - 7z^3 + az^2 + bz + 35 = 0$$

ş.a.m.d. Să se determine coeficienţii reali a şi b astfel încît ecuaţia să admită rădăcina $2 + i\sqrt{3}$ *şi să se rezolve ecuaţia.*

În cazul primului exemplu, se obţine sistemul

$$p - 4 = a, \quad -4p + q = 17, \quad 7p - 4q = b, \quad 5q = 35.$$

Ecuaţia a doua şi a patra dau p şi q, iar prima şi a doua dau coeficienţii a şi b.

3.2. RĂDĂCINILE IRAŢIONALE PĂTRATICE ALE UNEI ECUAŢII ALGEBRICE CU COEFICIENŢI RAŢIONALI

3.2.1. Iraţionale pătratice.

Numere reale ca

$$3 + \sqrt{5}, \ \frac{2}{3} - \frac{1}{7}\sqrt{13}, \ \frac{2}{5} + \frac{3}{8}\sqrt{11} \text{ etc.}$$

se numesc *iraţionale pătratice.*

Un număr iraţional pătratic (mai scurt, un iraţional pătratic) este *un număr real de forma*

$$m + n\sqrt{p},$$

unde $m \in Q$, $n \in Q \setminus \{0\}$, $p \in N$ *şi p nu conţine nici un factor care să fie pătrat perfect.*

În exemplele de mai sus m, n şi p sînt respectiv:

$$m = 3, \ n = 1, \ p = 5; \ m = \frac{2}{3}, \ n = -\frac{1}{7}, \ p = 13;$$

$$m = \frac{2}{5}, \ n = \frac{3}{8}, \ p = 11.$$

Mulţimea tuturor iraţionalelor pătratice care conţin sub radical acelaşi număr p fac parte dintr-un *corp pătratic*, care se notează cu $Q(\sqrt{p})$. $Q(\sqrt{p}) = \{m + n\sqrt{p} \mid m, n \in Q, p \in N$ şi p nu conţine nici un factor care să fie pătrat perfect$\}$.

De exemplu, toate numerele de forma $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in Q$, cum ar fi:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\sqrt{2},\ \frac{3}{8} + \sqrt{2},\ \frac{1969}{2000} - \frac{3}{940}\sqrt{2}, \ldots$$

formează corpul pătratic $Q(\sqrt{2})$; numerele

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sqrt{29},\ 1 - 4\sqrt{29}, 3 + 17\sqrt{29}, \ldots$$

formează corpul pătratic $Q(\sqrt{29})$.

Vom considera şi cazul în care sub radical apare un număr raţional oarecare, dar le vom transforma astfel încît sub radical să rămînă un număr natural care să nu conţină nici un pătrat perfect ca factor.

Exemple: $2 + \sqrt{45} = 2 + 3\sqrt{5}$, $3 + 4\sqrt{\frac{5}{6}} = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{30}$.

3.2.2. **Rădăcinile iraţionale pătratice ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali.** Fiind dat iraţionalul pătratic $x = m + n\sqrt{p}$, numărul $\bar{x} = m - n\sqrt{p}$ se numeşte conjugatul lui x. Această relaţie este simetrică: fiecare dintre numerele $x = m + n\sqrt{p}$ şi $\bar{x} = m - n\sqrt{p}$ este conjugatul celuilalt.

Exemple: $x = \frac{1}{2} + 3\sqrt{3}$, $\bar{x} = \frac{1}{2} - 3\sqrt{3}$;

$$x = 2 - \sqrt{7},\ \bar{x} = 2 + \sqrt{7}.$$

Toate cele arătate la 3.1.2.—3.1.6. despre numerele imaginar conjugate se pot repeta pentru iraţionalele pătratice. Se ajunge astfel la teorema:

Dacă o ecuaţie algebrică cu coeficienţi raţionali $P(x) = 0$ admite ca rădăcină un iraţional pătratic $m + n\sqrt{p}$, ea admite şi conjugatul său, $m - n\sqrt{p}$, ca rădăcină.

$$[P(m + n\sqrt{p}) = 0] \Rightarrow [P(m - n\sqrt{p}) = 0].$$

Cu alte cuvinte *rădăcinile de forma* $m + n\sqrt{p}$ *ale unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali sînt conjugate două cîte două.*

3.2.3. **Aplicaţie.** Să se rezolve ecuaţia

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 7x + 52 = 0$$

ştiind că admite rădăcina $4 + \sqrt{3}$.

Ecuaţia admite şi rădăcina $4 - \sqrt{3}$. Trinomul cu rădăcinile $4 + \sqrt{3}$ şi $4 - \sqrt{3}$ este $x^2 - 8x + 13$. Împărţim $P(x)$ prin acest trinom şi obţinem cîtul $x^2 + 3x + 4$ cu rădăcinile $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Rădăcinile ecuaţiei sînt: $4 \pm \sqrt{3}$ şi $\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

3.2.4. **Observare.** Se poate demonstra că dacă o ecuaţie algebrică cu coeficienţi raţionali admite o rădăcină de forma $m + n\sqrt{p} + q\sqrt{r}$, unde $m, n, q \in Q$, $p, r \in N$ şi nici p, nici r nu conţin ca factori nici un pătrat perfect, ea admite şi rădăcinile $m - n\sqrt{p} + q\sqrt{r}$, $m + n\sqrt{p} - q\sqrt{r}$, $m - n\sqrt{p} - q\sqrt{r}$, care se obţin schimbînd semnele în toate modurile posibile. Analog, în cazul unei rădăcini de forma $m + n\sqrt{p} + q\sqrt{r} + s\sqrt{t}$, ş.a.m.d.

3.3. RĂDĂCINILE IRAŢIONALE ALE UNEI ECUAŢII ALGEBRICE CU COEFICIENŢI ÎNTREGI

3.3.1. **Limitele rădăcinilor.** Dacă o ecuaţie algebrică are coeficienţi întregi, rădăcinile ei raţionale, dacă există, se pot găsi prin încercări. Pentru ca numărul acestor încercări să fie cît mai mic, este util să găsim în prealabil un interval, cît mai mic, în care se găsesc toate rădăcinile reale ale ecuaţiei.

Fie $P(x) = 0$ o ecuaţie algebrică cu coeficienţi reali. Dacă ea nu are nici o rădăcină reală mai mare decît un număr L, se spune că L este o *limită superioară a rădăcinilor ecuaţiei*; dacă ecuaţia nu admite nici o rădăcină mai mică decît numărul L', se spune că L' este o *limită inferioară a rădăcinilor ecuaţiei.*

Dacă am găsit limitele L' şi L ştim că rădăcinile reale ale ecuaţiei, dacă există, se află în intervalul (L', L); ecuaţia nu are nici o rădăcină în afara acestui interval (fig. 1).

Numerele L şi L' nu sînt unic determinate. De exemplu, dacă printr-o metodă găsim $L' = -15$, $L = 24$, înseamnă că rădăcinile reale

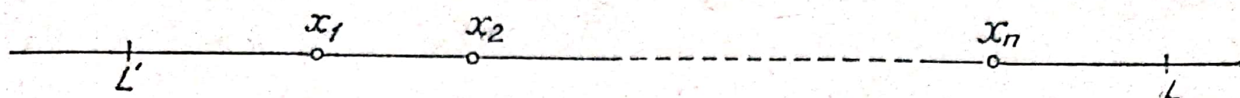


Fig. 1.

ale ecuației se găsesc în intervalul (—15, 24); dacă printr-o altă metodă găsim $L' = -10$, $L = 18$, înseamnă că rădăcinile se găsesc în intervalul (—10, 18). Aceste rezultate nu sînt contradictorii, dar al doilea este mai util.

3.3.2. **Propoziție ajutătoare.** Fie, de exemplu, ecuația

$$P(x) = 4x^6 + x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 6x - 7 = 0,$$

care prezintă particularitatea următoare: semnele coeficienților polinomului $P(x)$ sînt: $++++---$; primii coeficienți sînt pozitivi, iar îndată ce apare un coeficient negativ, toți coeficienții următori sînt negativi. Se spune că polinomul are *o singură variație*. Polinoamele în care coeficienții au semnele $+++----$, sau $+----$, etc. au de asemenea o singură variație.

Punem polinomul $P(x)$ sub forma

$$P(x) = x^3\left[4x^3 + x^2 + 2x + 5 - \left(\frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)\right].$$

(Am scos în fața parantezei cea mai mică putere a lui x care are un coeficient pozitiv.)

Expresia dintre paranteze este de forma

$$E(x) = f(x) - g(x)$$

unde

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + 2x + 5, \; g(x) = \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}.$$

Considerăm funcțiile f, g și E definite de aceste relații pentru $x \in (0, \infty)$. Funcția f este crescătoare, iar funcția g este descrescătoare pe acest interval. În adevăr, derivata

$$f'(x) = 12x^2 + 2x + 2$$

este pozitivă pentru orice x din intervalul $(0, \infty)$, iar

$$g'(x) = -\frac{8}{x^2} - \frac{12}{x^3} - \frac{21}{x^4}$$

este negativă pentru orice x din acest interval. Rezultă că funcția E este crescătoare în intervalul $(0, \infty)$, căci dacă descăzutul $f(x)$ crește și scăzătorul $g(x)$ descrește, diferența $E(x)$ crește.

Fie acum a un număr pozitiv pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este pozitivă: $a > 0$, $E(a) > 0$. Deoarece funcția E este crescătoare în intervalul $(0, \infty)$, $E(x)$ va fi pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare decît a. Revenim la polinomul $P(x)$,

$$P(x) = x^3 E(x).$$

Dat fiind că $x^3 > 0$ cînd $x > 0$, rezultă $P(x) > 0$ pentru orice $x > a$.

Acest raționament se poate face în cazul oricărui polinom cu coeficienți reali care are o singură variație. Rezultă că:

Dacă un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali care are o singură variație este pozitiv pentru o valoare pozitivă a lui x, $x = a$, el rămîne pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare decît a.

$$[a > 0,\ P(a) > 0] \Rightarrow [x > a \Rightarrow P(x) > 0].$$

3.3.3. **Metoda grupării termenilor.** Numărul a din această propoziție este o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$, $a = L$, căci pentru orice $x > a$, $P(x) > 0$, deci $P(x) \neq 0$.

Deci, dacă polinomul $P(x)$ cu coeficienți reali are o singură variație, orice număr care face polinomul $P(x)$ pozitiv este o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

Dacă polinomul $P(x)$ are mai multe variații, se procedează prin *gruparea termenilor*, ca în exemplul următor.

Fie ecuația

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0.$$

Grupăm termenii astfel încît:

a) coeficientul primului termen din fiecare grupă să fie pozitiv;

b) fiecare grupă să aibă o singură variație sau nici una.

Deci scriem:

$$P(x) = (x^6 - 3x^5) + (2x^4 - 31x) + (3x^2 - 96)$$

sau

$$P(x) = \underbrace{x^5(x-3)}_{4} + \underbrace{x(2x^3-31)}_{3} + \underbrace{(3x^2-96)}_{6}.$$

Căutăm cel mai mic număr întreg, pentru care fiecare grupă este pozitivă. Găsim pentru prima grupă 4, pentru a doua 3 și pentru a treia 6. Conform propoziției auxiliare (3.3.2), prima grupă este pozitivă pentru $x > 4$, a doua pentru $x > 3$, iar a treia pentru $x > 6$. Pentru $x > 6$, toate grupele vor fi pozitive, deci polinomul va fi pozitiv, deci $L = 6$ este o limită superioară a rădăcinilor ecuației propuse.

Gruparea se poate face și astfel:

$$F(x) = \underbrace{x(x-3)}_{4} + \underbrace{(2x^4-96)}_{3} + \underbrace{x(3x-31)}_{11}.$$

Am obținut $L = 11 > 5$. Prima grupare dă un rezultat mai bun.

3.3.4. **Transformata în $(-x)$.** Considerăm, de exemplu, o ecuație de gradul IV:

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \qquad (1)$$

Introducem o altă necunoscută $y = -x$. Ecuația devine

$$P(-x) = Q(y) = a_0y^4 - a_1y^3 + a_2y^2 - a_3y + a_4 = 0. \qquad (2)$$

Ce legătură există între rădăcinile acestor ecuații?

Fie r o rădăcină a ecuației (1), deci

$$P(r) = a_0r^4 + a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + a_4 = 0.$$

Dacă înlocuim în ecuația a doua y prin $-r$, obținem

$$Q(-r) = a_0r^4 + a_1r^3 + a_2r^2 + a_3r + a_4.$$

Relația precedentă arată că această expresie este egală cu zero, deci $-r$ este rădăcină a ecuației (2). Așadar, dacă r este o rădăcină a ecuației (1), atunci $-r$ este o rădăcină a ecuației (2).

Dacă în (2) notăm necunoscuta cu x, ea se scrie:

$$P(-x) = a_0x^4 - a_1x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = 0$$

și se numește *transformata în $(-x)$ a ecuației* (1).

Din cele arătate rezultă că, în general:

Dacă o ecuație algebrică $P(x) = 0$ are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, transformata ei în $(-x)$, $P(-x) = 0$ are rădăcinile $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$.

Transformata în $(-x)$ a transformatei în $(-x)$ a unei ecuații $P(x) = 0$ este chiar ecuația $P(x) = 0$. Rezultă că, dacă transformata în $(-x)$ a unei ecuații $P(x) = 0$, adică ecuația $P(-x) = 0$ are rădăcinile x_1, $x_2, \ldots, x_n$, ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$.

3.3.5. **Limita inferioară a rădăcinilor.** Această limită se află cu ajutorul transformatei în $(-x)$.

Considerăm ecuația $P(x) = 0$ și transformata ei în $(-x)$, $P(-x) = 0$. Fie L o limită superioară a rădăcinilor ecuației $P(-x) = 0$. Aceasta înseamnă că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile acestei ecuații, au loc relațiile

$$x_1 < L,\ x_2 < L,\ \ldots,\ x_n < L.$$

Conform propoziției de la 3.3.4, ecuația inițială $P(x) = 0$ va avea rădăcinile $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ și vor avea loc relațiile

$$-x_1 > -L,\ -x_2 > -L,\ \ldots\ -x_n > -L,$$

ceea ce înseamnă că toate rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt mai mari decît $-L$; numărul $L' = -L$ este o limită inferioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

Rezultă că, pentru a afla limita inferioară a rădăcinilor unei ecuații $P(x) = 0$, se poate proceda astfel: se formează transformata în $(-x)$ și se caută o limită superioară a rădăcinilor ei, L. Numărul $L' = -L$ va fi o limită inferioară a rădăcinilor ecuației $P(x) = 0$.

3.3.6. **Exemplu.** În cazul ecuației (3.3.3)

$$P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0,$$

transformata în $(-x)$ este

$$P(-x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 31x - 96 = 0$$

Grupăm termenii astfel:

$$\underbrace{(x^6 - 96)}_{3} + \underbrace{(3x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 31x)}_{1}.$$

Am obținut $L = 3$, deci $L' = -3$ este o limită inferioară a rădăcinilor ecuației propuse.

Am aflat mai înainte (3.3.3) că pentru ecuația dată $L = 6$ și am aflat acum că $L' = -3$. Rezultă că ecuația nu poate avea rădăcini reale decît în intervalul $(-3, 6)$.

3.3.7. Aflarea rădăcinilor întregi. Fie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

o ecuație algebrică cu coeficienți întregi, $a_i \in Z$, și fie $x = p$ o rădăcină întreagă a ei, $p \in Z$. Atunci

$$a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0,$$

de unde

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = -a_n$$

sau

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1} = -\frac{a_n}{p}.$$

Expresia din partea stîngă a acestei relații este un număr întreg, căci toate literele pe care le conține reprezintă numere întregi. Rezultă că și în partea dreaptă trebuie să figureze un număr întreg, deci a_n este divizibil prin p.



Dacă o ecuație algebrică $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n = 0$ cu coeficienți întregi admite ca rădăcină numărul întreg p, atunci a_n este divizibil prin p.

$$[p \in Z,\ P(p) = 0] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p].$$

De aici rezultă că, pentru a afla rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi se poate proceda astfel: se face o listă a tuturor divizorilor termenului liber din intervalul (L', L) și, prin încercări, se stabilește care dintre ei satisfac ecuația. Ecuația nu are alte rădăcini întregi decît cele găsite pe această cale.

3.3.8. Exemplu. Reluăm ecuația

$$x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 31x - 96 = 0.$$

Am stabilit că rădăcinile ei se pot găsi numai în intervalul $(-3, 6)$. Divizorii lui 96 care se găsesc în acest interval sînt $-2, -1, 1, 2, 3$ și 4.
Numai aceste numere întregi vin în considerație. Le încercăm pe rînd, folosind schema lui Horner:

1	−3	2	0	3	−31	−96	
1	−5	12	−24	51	−133	*	−2
1	−4	6	−6	9	−40	*	−1
1	−2	0	0	3	−28	*	1
1	−1	0	0	3	−25	*	2
1	0	2	6	21	32	0	3

Polinomul se împarte prin $x + 2$ şi se constată că împărţirea nu se face exact — în locul restului se pune o steluţă. Apoi se împarte prin $x + 1$, $x - 1$ şi $x - 2$, şi se constată că nici -1, nici 1, nici 2 nu sînt rădăcini. Împărţirea prin $x - 3$ se face exact. Ar trebui să împărţim cîtul $(x^5 + 2x^3 + 6x^2 + 21x + 32)$ din nou prin $x - 3$, pentru a vedea dacă x nu este rădăcină dublă, apoi prin $x - 4$, dar în cazul de faţă aceste încercări nu sînt necesare, deoarece toţi coeficienţii cîtului sînt pozitivi, deci el nu poate avea o rădăcină pozitivă.

3.3.9. **Aflarea rădăcinilor fracţionare.** Admitem ca adevărate următoarele propoziţii:

1) *Fie a şi b două numere întregi. Dacă a este prim cu b, atunci şi* a^n $(n \in N)$ *este prim cu b.*

De exemplu, 14 este prim cu 15, căci $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$ (aceste numere nu au nici un divizor comun); $14^2 = 2^2 \cdot 7^2$; $14^3 = 2^3 \cdot 7^3$... sînt de asemenea prime cu 15.

2) *Fie a, b, c trei numere întregi. Dacă produsul ab este divizibil prin c şi a este prim cu c, atunci b este divizibil prin c.*

De exemplu, $35 \cdot 12$, adică 420 este divizibil prin 6; 35 este prim cu 6, dar 12 este divizibil cu 6.

Condiţia ca a să fie prim cu c este esenţială. De exemplu $42 \cdot 18$, adică 756 este divizibil prin 12, dar nici 42, nici 18 nu este divizibil prin 12; deoarece unul din factori, în cazul de faţă 42, nu este prim cu 12, nu sîntem în drept să conchidem că celălalt factor este divizibil prin 12.

Fie acum

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, x + a_n = 0$$

o ecuaţie algebrică cu *coeficienţi întregi*. Să presupunem că fracţia ireductibilă $\frac{p}{q}$ este o rădăcină a ei:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0.$$

Scăpăm de numitori:

$$(\alpha)\quad a_0p^n + a_1p^{n-1}\, q + \dots + a_{n-1}\, pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

a) Această relaţie se poate pune sub forma

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}\, q + \dots + a_{n-1}\, q^{n-1}) = -\, a_nq^n$$

sau

$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \dots + a_{n-1}q^{n-1} = -\frac{a_nq^n}{p}.$$

Expresia din partea stîngă reprezintă un număr întreg, deci și expresia din dreapta trebuie să reprezinte un număr întreg, ceea ce se întîmplă numai dacă a_nq^n este divizibil prin p. Or, a_nq^n este un produs de doi factori; fracția $\frac{q}{p}$ fiind ireductibilă, q este prim cu p; pe baza primei propoziții, deducem că și q^n este prim cu p. Deci unul dintre factorii produsului a_nq^n este prim cu p; pe baza propoziției a doua deducem că celălalt factor, a_n, este divizibil prin p.

b) Reluăm relația (α). Printr-un procedeu simetric cu cel de mai sus, o punem sub forma

$$a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}\,pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = -\frac{a_0p^n}{q}$$

și, prin același raționament ca cel de mai sus, ajungem la concluzia că a_0 este divizibil prin q. Așadar:



Dacă o ecuație algebrică $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ cu coeficienți întregi admite ca rădăcină fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$, atunci a_n este divizibil prin p și a_0 este divizibil prin q.

$$\left[\frac{p}{q} \in Q,\ P\left(\frac{p}{q}\right) = 0\right] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p,\ a_0 \text{ divizibil prin } q.].$$

Pentru a ține minte care dintre termenii fracției $\frac{p}{q}$ este un divizor al lui a_0 și care al lui a_n, este bine să observăm că, dacă $q = 1$, rădăcina este numărul întreg p — care trebuie să fie un divizor al lui a_n. Sau, cu ajutorul schiței

$$a_0x^n + \dots + a_n.$$
$$\nwarrow \quad \frac{p}{q} \quad \nearrow$$

De aici rezultă procedeul următor pentru a afla rădăcinile fracționare ale unei ecuații cu coeficienți întregi: se formează toate fracțiile ireductibile care au ca numărător un divizor al termenului liber

şi ca numitor un divizor al primului coeficient, apoi se stabileşte prin încercări care dintre ele satisfac ecuaţia.

3.3.10. **Exemplu.** Să se afle rădăcinile fracţionare ale ecuaţiei

$$4x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 13x - 3 = 0.$$

Divizorii pozitivi ai lui 3 sînt 1, 2, 3, divizorii pozitivi ai lui 4 sînt 1,2,3,4. Îi aşezăm într-un tabel (lăsînd la o parte pe 1 de la divizorii lui 4)

1	2	3
2	4	

Acum formăm toate fracţiile care au numărătorul 1 şi numitorul 2 sau 4, cele care au numărătorul 2 şi numitorul 2 sau 4, apoi cele care au numărătorul 3 şi numitorul 2 sau 4 — lăsînd la o parte fracţiile reductibile. Obţinem

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},$$

la care se adaugă

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4}.$$

Acestea sînt singurele fracţii care vin în considerare. Le încercăm:

4	+8	−11	−13	−3	
4	10	−6	−16	*	$\frac{1}{2}$
4	9	*			$\frac{1}{4}$
4	14	10	2	0	$\frac{3}{2}$
4	20	40	*		$\frac{3}{2}$
4	12	4	0		$-\frac{1}{2}$

Primele două rînduri arată că $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{4}$ nu sînt rădăcini. Dacă la cît apare un coeficient fracţionar, lucrarea nu mai trebuie continuată — este sigur că numărul respectiv nu este rădăcină. (v. problema 38). Rîndul al treilea arată că $\frac{3}{2}$ este rădăcină. Cîtul obţinut, l-am împărţit din nouă prin $x - \frac{3}{2}$, pentru a vedea dacă

$\frac{3}{2}$ nu este rădăcină multiplă — am constatat că nu. Deoarece toţi coeficienţii cîtului din rîndul al treilea sînt pozitivi, el nu admite nici o rădăcină pozitivă, de aceea n-am mai încercat fracţia $\frac{3}{4}$. Împărţirea următoare arată că $-\frac{1}{2}$ este rădăcină şi a rămas de rezolvat ecuaţia $4x^2 - 12x + 4 = 0$, adică $x^2 - 3x + 1 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei sînt:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

3.3.11. **Excluderea unor fracţii.** Dacă numărul fracţiilor care trebuie încercate este mare, unele dintre ele pot fi eliminate pe baza observaţiei următoare.

Presupunem că ecuaţia cu coeficienţi întregi $P(x) = 0$ admite ca rădăcină fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$. Atunci polinomul $P(x)$ este divizibil prin $x - \frac{a}{b}$, sau prin $bx - a$, şi are loc identitatea

$$\forall\ x,\ x \in R \qquad P(x) = (bx - a)C(x)$$

unde $C(x)$ este un polinom cu coeficienţi întregi (v. problema 38).

Înlocuim în această identitate x prin 1; obţinem

$$P(1) = (b - a)C(1).$$

Deoarece $P(1)$ şi $C(1)$ sînt numere întregi, această relaţie arată că $P(1)$ este divizibil prin $b - a$. Rezultă că, dacă $P(1)$ nu este divizibil prin $b - a$, fracţia $\frac{a}{b}$ nu este rădăcină. Înlocuind în identitatea de mai sus x prin -1, se arată în mod analog că, dacă $P(-1)$ nu este divizibil prin $a + b$, fracţia $\frac{a}{b}$ nu este rădăcină.

În cazul ecuaţiei de mai sus (3.3.10), $P(1) = -15$, $P(-1) = -5$. Lucrările se pot aşeza astfel:

$\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	
$b - a$	1	3	-1	1	3	5	5	7	$P(1) = -15$
$a + b$	3	5	5	7	1	3	-1	1	$P(-1) = -5$

$P(1) = -15$ este divizibil prin toate numerele din rîndul al doilea afară de 7, ceea ce duce la eliminarea fracţiei $-\frac{3}{4}$; $P(-1) = -5$ este divizibil prin toate numerele din rîndul al treilea afară de 3 şi 7, ceea ce duce la eliminarea fracţiilor $\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{4}$. În felul acesta am eliminat trei fracţii — au rămas de încercat celelalte.

3.3.12. **Regulă.** Pentru a afla rădăcinile raționale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, se fac lucrările următoare:

1. Se determină limitele rădăcinilor L și L'.
2. Se caută rădăcinile întregi.
3. Se caută rădăcinile fracționare.

În principiu, s-ar putea căuta întîi rădăcinile fracționare, dar este mai practic să se caute întîi rădăcinile întregi, care cer calcule mai ușoare. Dacă ecuația admite una sau mai multe rădăcini întregi, rămîn de căutat rădăcinile fracționare ale unei ecuații de grad mai mic, unde calculele sînt mai simple.

3.4. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR CU COEFICIENȚI REALI

3.4.1. **În ce constă problema.** Se știe că orice polinom de gradul n se poate descompune în n factori liniari — dacă se admite ca termenii liberi ai factorilor să fie numere complexe. Această descompunere nu mai este totdeauna posibilă în cazul unui polinom cu coeficienți reali dacă se cere ca termenii liberi ai factorilor să fie reali. De exemplu, ecuația $x^2 - 4x + 5 = 0$ are rădăcinile $2 \pm i$, deci

$$x^2 - 4x + 5 = [x - (2 - i)][x - (2 + i)].$$

Descompunerea în factori liniari fiind unică (2.2.7.), sîntem siguri că nu există factori liniari reali al căror produs să fie tot $x^2 - 4x + 5$. Urmează să vedem cum se poate descompune un polinom cu coeficienți reali în factori cu coeficienți reali.

3.4.2. **Polinoame ireductibile**

Un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali se numește reductibil într-o mulțime numerică dată (Z, Q, R sau C) dacă există două polinoame, $A(x)$ și $L(x)$ cu coeficienți din acea mulțime astfel încît să aibă loc identitatea

$$P(x) = A(x)B(x).$$

Un polinom care nu este reductibil într-o mulțime numerică dată se numește *ireductibil* în acea mulțime.

Subliniem că o afirmaţie ca: polinomul $P(x)$ este reductibil (sau ireductibil) nu are nici un sens dacă nu se precizează cărei mulţimi îi aparţin coeficienţii factorilor. Astfel, polinomul $x^2 - 4x + 5$ de mai sus este reductibil în C, dar nu este reductibil în R. Tot aşa

$$F(x) = x^2 - 4x + 1 = [x - (2 - \sqrt{3})][x - (2 + \sqrt{3})]$$

este reductibil în R, dar nu este reductibil în Q, şi cu atît mai puţin în Z.

3.4.3. Descompunerea polinoamelor cu coeficienţi reali

Orice polinom cu coeficienţi reali se poate descompune în factori ireductibili de gradul *I* şi *II* cu coeficienţi reali.

În adevăr, fie $P(x) = 0$ o ecuaţie algebrică cu coeficienţi reali. Fiecărei rădăcini reale r, îi corespunde un factor real $(x - r)$. Dacă ecuaţia are o rădăcină imaginară $a + bi$, ea are şi rădăcina $a - bi$ şi în descompunerea polinomului în factori liniari apar factorii $x - (a + bi)$ şi $x - (a - bi)$. Dacă grupăm aceşti factori la un loc şi efectuăm înmulţirea, obţinem:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) + bi][(x - a) - bi] = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

adică un factor de forma $x^2 + px + q$, unde $p, q \in R$.

Dacă ecuaţia are o rădăcină imaginară multiplă $a + bi$ de ordinul k, în descompunerea lui $P(x)$ apar factorii

$$[x - (a + bi)]^k \text{ şi } [x - (a - bi)]^k$$

produsul lor este $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k$, adică de forma $(x^2 + px + q)^k$.

3.4.4. Exemple. 1) Ecuaţia

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 5x + 6 = 0$$

are rădăcinile simple 2 şi 3, şi rădăcinile duble i şi $-$i. Descompunerea polinomului $P(x)$ în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 2)\ (x - 3)\ (x^2 + 1)^2.$$

2) Ecuaţia

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x - 14 = 0$$

are rădăcinile $1, 2 \pm i\sqrt{3}, -1 \pm i$. Descompunerea polinomului $P(x)$ în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 7)(x^2 + 2x + 2).$$

3.4.5. **Studiul semnului unui polinom.** Se știe din algebra elementară cum se studiază semnul unui produs sau al unui cît de polinoame, folosind descompunerea polinoamelor în factori liniari și teoremele despre semnul trinomului. Acum cînd știm să rezolvăm unele ecuații de grad superior, putem folosi aceeași metodă pentru a studia semnul unui polinom de grad mai mare.

Fie, de exemplu, de studiat semnul polinomului

$$P(x) = 2x^6 - 29x^5 + 136x^4 - 230x^3 + 98x^2 - 61x + 84.$$

Ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile $1, 3, 4, 7$ și $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$. Descompunerea polinomului în factori reali ireductibili este

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 7)(2x^2 + x + 1).$$

Trinomul $2x^2 + x + 1$ este pozitiv* pentru orice valoare reală a lui x, deci acest factor nu influențează semnul lui $P(x)$. Rămîne de studiat semnul produsului format din primii patru factori. Acest lucru se face cu ajutorul unui tabel ca cel de mai jos.

x		1		3		4		7	
$x - 1$	—	0	+	+	+	+	+	+	+
$x - 3$	—	—	—	0	+	+	+	+	+
$x - 4$	—	—	—	—	—	0	+	+	+
$x - 7$	—	—	—	—	—	—	—	0	+
$p(x)$	+	0	—	0	+	0	—	0	+

* Teorema cu privire la semnul trinomului $f(x) = ax^2 + bx + c$ în cazul rădăcinilor imaginare este o consecință a unei teoreme de analiză după care o funcție continuă într-un interval închis nu poate să-și schimbe semnul fără să se anuleze (4.2.2).

În adevăr, dacă ar exista două valori x_1 și x_2 astfel încît $f(x_1)$ și $f(x_2)$ să fie de semne contrare, ar exista $x_3 \in (x_1, x_2)$ pentru care trinomul se anulează ceea ce este contrar ipotezei. Deci trinomul are semn constant. Deoarece $f(0) = c$, $f(x)$ are același semn cu c oricare ar fi $x \in R$. Pentru a obține regula uzuală (trinomul are același semn cu a oricare ar fi x), se observă că a și c au același semn, căci în cazul contrar am avea $ac < 0$, deci $b^2 - 4ac > 0$.

Se studiază semnul fiecărui factor în parte, apoi se completează ultimul rînd pe baza rîndurilor precedente. Se constată că polinomul își păstrează semnul cînd x variază între două rădăcini consecutive și își schimbă semnul ori de cîte ori x trece printr-o rădăcină.

Rezumat

● Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți *reali* $P(z) = 0$ are rădăcina $u + vi$, ea are și rădăcina $u - vi$.

$$[P(u + vi) = 0] \Rightarrow [P(u - vi) = 0].$$

● Dacă o ecuație algebrică cu coeficienți *raționali* $P(z) = 0$ are ca rădăcină iraționalul pătratic $m + n\sqrt{p}$, ea are și rădăcina $m - n\sqrt{p}$.

$$[P(m + n\sqrt{p}) = 0] \Rightarrow [P(m - n\sqrt{p}) = 0].$$

● Dacă numărul întreg p este o rădăcină a ecuației cu coeficienți *întregi* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n = 0$, atunci a_n este divizibil prin p.

$$[p \in Z,\ P(p) = 0] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p].$$

● Dacă fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$ este o rădăcină a ecuației cu coeficienți *întregi* $P(x) = a_0x^n + \ldots + a_n = 0$, atunci a_n este divizibil prin p și a_0 este divizibil prin q.

$$\left[\frac{p}{q} \in Q,\ P\left(\frac{p}{q}\right) = 0\right] \Rightarrow [a_n \text{ divizibil prin } p,\ a_0 \text{ divizibil prin } q].$$

● Orice polinom cu coeficienți reali se poate descompune în factori ireductibili de gradul I și II cu coeficienți reali.

EXERCIŢII

RĂDĂCINI IMAGINARE

1. Să se rezolve ecuaţiile următoare ştiind că fiecare din ele are rădăcina scrisă în dreptul ei.

a) $z^4 - 12z^3 + 50z^2 - 76z + 17 = 0$, $z_1 = 4 - i$;

b) $z^4 - 3\sqrt{5}z^3 + 11z^2 - 3\sqrt{5}z + 10 = 0$, $z_1 = i$;

c) $z^6 + z^5 - 8z^4 - 9z^3 + 11z^2 + 20z + 20 = 0$, $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2. Se dau ecuaţiile următoare. Să se determine pentru fiecare din ele coeficienţii reali a şi b, astfel încît să admită rădăcina scrisă în dreptul ei.

a) $z^4 - 2z^3 - 14z^2 + az + b = 0$, $\quad z_1 = -1 + i\sqrt{2}$;

b) $4z^4 + az^3 + bz^2 - 136z + 29 = 0$, $\quad z_1 = \dfrac{5 - 2i}{2}$.

Calculul dă de la sine pentru a şi b valori reale. Atunci de ce s-a pus în mod expres condiţia ca a şi b să fie reali? (v. problema următoare).

3. Se dă ecuaţia

$$P(z) = z^3 + az^2 + (8 + 3i)z - 4 - 2i = 0.$$

a) Să se determine a şi să se rezolve ecuaţia, ştiind că are rădăcina $2 + i$.
b) Aceeaşi problemă, dacă se cere ca a să fie real.

4. Să se rezolve ecuaţia

$$z^3 - (5 - i)z^2 + (5 - 4i)z - 1 + i = 0$$

ştiind că admite rădăcina $1 - i$.

5. Unde intervine în demonstraţia teoremei de la 3.1.5 (rădăcinile imaginare ale unei ecuaţii cu coeficienţi reali) faptul că coeficienţii ecuaţiei sînt reali? De ce nu mai este teorema adevărată dacă ecuaţia are coeficienţi complecşi?

6. Să se formuleze şi să se demonstreze o reciprocă a teoremei de la 3.1.5.

7. Să se pună sub forma de iraționale pătratice numerele:

$$4 - 5\sqrt{32},\ 1 + \sqrt{\frac{3}{8}},\ 2 - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{10}}.$$

8. Să se rezolve ecuația următoare știind că admite rădăcina indicată:

a) $2x^4 - 11x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0,\qquad x_1 = 3 - \sqrt{7};$

b) $x^6 - 10x^4 + 31x^2 - 30 = 0,\qquad x_1 = \sqrt{2}.$

9. Să se determine parametrii raționali m și n astfel încît ecuația următoare să admită rădăcina indicată și să se rezolve:

a) $x^4 + mx^3 - x^2 - 2x + n = 0,\qquad x_1 = 2 + \sqrt{2};$

b) $x^4 - 2x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0,\qquad x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}.$

Aceeași problemă, dacă nu se pune condiția ca parametrii să fie raționali.

10. Se consideră ecuația

$$x^3 - 3x^2 + ax - \sqrt{2} = 0.$$

Să se determine a și să se rezolve ecuația, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

11. a) Să se determine numerele raționale m și a astfel încît ecuația

a) $x^3 - 9x^2 + 25x + m = 0$; b) $x^3 - 4x^2 - 5x + m = 0$

să aibă o rădăcină egală cu $a + \sqrt{2}$ și să se rezolve apoi ecuația.

12. Să se determine coeficienții raționali m, n, p și q astfel încît ecuația

$$x^6 + mx^5 + nx^4 + 4x^3 + 23x^2 + px + q = 0$$

să admită rădăcinile $3 + \sqrt{11}$ și $2 - \sqrt{5}$ și să se rezolve.

13. * Se consideră ecuația

$$2x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + dx + 8 = 0.$$

Să se determine parametrii raționali a, b, c, d, astfel încît ecuația să admită rădăcinile $5 + i\sqrt{3}$ și $1 - \sqrt{2}$ și să se rezolve.

14.* Se dau ecuațiile următoare

a) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c = 0;$

b) $x^5 + ax^4 - 8x^3 + 5x^2 + bx + c = 0;$

c) $x^5 + 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 6x + c = 0.$

---

* În problemele 13—15 nu se vor face calculele; se va arăta numai calea de rezolvare.

Să se determine pentru fiecare din ele parametrii reali a, b, c astfel încît ecuaţia să admită rădăcina $1 + i\sqrt{3}$ şi între două dintre rădăcinile ei α şi β, deosebite de cea dată şi de conjugata ei, să existe relaţia $\beta = 2\alpha$ şi să se rezolve.

15.* Se dau ecuaţiile

a) $2x^5 + ax^4 - 6x^3 + 3x^2 - x + a = 0$;

b) $4x^5 - 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + 1 = 0$.

Să se determine pentru fiecare din ele parametrii reali a şi b astfel încît ecuaţia să admită rădăcina $3 + 2i$ şi o rădăcină dublă deosebită de cea dată şi de conjugata ei.

16. Să se enunţe şi să se demonstreze în legătură cu rădăcinile de forma $m + n\sqrt{p}$ ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali teoremele analoge cu cele de la 3.1.2—3.1.5. Se vor trata şi chestiunile analoge cu cele de la problema 5 de la acest capitol.

Se va face o schemă analogă cu cea de la 3.1.6.

17. Să se demonstreze teorema de la 3.1.4 despre valorile unui polinom cu coeficienţi reali pentru două valori imaginar conjugate ale variabilei în cazul ecuaţiei de gradul IV,

$$P(x) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + c \quad a, b, c, d \in R,$$

calculînd efectiv $P(u + vi)$ şi $P(u - vi)$.

Se poate face demonstraţia analogă în cazul general, al unui polinom de gradul n?

18. O ecuaţie algebrică cu coeficienţi reali admite numărul $a + bi$ ca rădăcină multiplă. Să se demonstreze că ea admite şi $a - bi$ ca rădăcină multiplă de acelaşi ordin.

Să se enunţe şi să se demonstreze o propoziţie analogă cu privire la rădăcinile multiple iraţionale pătratice ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali.

19. a) Să se demonstreze că numărul rădăcinilor imaginare ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi reali este par, oricare ar fi gradul ecuaţiei. b) Ce se poate spune despre gradul unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi reali care are numai rădăcini imaginare? c) Să se formuleze şi să se demonstreze propoziţiile analoge cu privire la rădăcinile iraţionale pătratice ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali.

20. a) Afirmaţia: „Dacă realizantul unei ecuaţii de gradul II este pozitiv, $b^2 - 4ac > 0$, ecuaţia are rădăcini reale" este justă? Să se verifice pe ecuaţia $z^2 - 2iz - 2 = 0$.

---

* În problemele 13 — 15 nu se vor face calculele; se va arăta numai calea de rezolvare.

b) Dar afirmația: „Dacă $b^2 - 4ac < 0$ ecuația are două rădăcini imaginare"? Exemplu: $z^2 - 2(1 + i)z + 1 + 2i = 0$.

c) Aceeași întrebare cu privire la afirmația: „Dacă realizantul unei ecuații de gradul II este un pătrat perfect, rădăcinile ecuației sînt raționale". Să se dea un contraexemplu.

RĂDĂCINILE RAȚIONALE ALE UNEI ECUAȚII CU COEFICIENȚI ÎNTREGI

21. Reciproca propoziției de la 3.3.7 (cu privire la rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi) este adevărată?

22. Să se refacă demonstrația propoziției de la 3.3.7 pe cazul ecuației

$$x^3 + 2x^2 + 8x - 12 = 0.$$

23. Se dau ecuațiile următoare. Să se afle rădăcinile lor întregi și, cînd este posibil, să se afle și celelalte rădăcini.

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12 = 0$;

b) $x^6 - 32x^4 + 32x^3 + 31x^2 - 92x + 60 = 0$;

c) $2x^5 + 11x^4 + 7x^3 - 20x^2 - 36x - 144 = 0$;

d) $x^4 - 33a^2x^2 - 28a^3x + 60a^4 = 0$;

e) $x^4 - \sqrt{3}x^3 - 126x^2 + 258\sqrt{3}x - 756 = 0$;

f) $x^5 - 13x^4 + 65x^3 - 161x^2 + 200x - 100 = 0$.

24. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuației

$$x^3 + \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - 8 = 0.$$

25. a) Să se determine numărul întreg a astfel încît ecuația

$$2x^4 + x^3 + ax + 1 = 0$$

să admită o rădăcină întreagă. b) Aceeași chestiune dacă se cere ca a să fie rațional sau real, nu neapărat întreg.

26. Ce relație trebuie să existe între numerele întregi p și q pentru ca ecuația

$$x^3 + px^2 + qx - 1 = 0$$

să admită o rădăcină întreagă?

27. Să se demonstreze că dacă toți coeficienții unei ecuații algebrice afară de unul sînt raționali, ecuația nu poate admite o rădăcină rațională. (Se poate considera cazul ecuației $ax^3 + bx^2 + \alpha x + c = 0$ unde $a, b, c \in Q$, $\alpha \notin Q$.)

28. Să se refacă demonstrația propoziției de la 3.3.9 pe cazul ecuației

$$4x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 0.$$

29. Reciproca propoziției de la 3.3.9 (cu privire la rădăcinile fracționare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi) este adevărată?

30. Cum se poate deduce propoziția de la 3.3.7 din propoziția de la 3.3.9?

31. Să se afle rădăcinile fracționare ale ecuațiilor următoare. Cînd este posibil, se vor afla și celelalte rădăcini.

a) $8x^4 + 26x^3 - 15x^2 - 2x + 1 = 0$;

b) $9x^4 + 9x^3 + 20x^2 - 32x + 8 = 0$;

c) $24x^5 + 106\,mx^4 + 57m^2x^3 - 20m^3x^2 - 15m^4x - 2m^5 = 0$

d) $20x^5 - 7ax^4 + 17a^2x^3 + 13a^3x^2 - 10a^4x - 3a^5 = 0$;

e) $18x^5 - 51x^4 - 118x^3 + 249x^2 - 132x + 20 = 0$.

32. Să se rezolve ecuațiile următoare:

a) $2x^4 - 19x^3 + 59x^2 - 109x + 42 = 0$;

b) $4x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 44x^2 + 41x - 10 = 0$;

c) $6x^5 + 5ax^4 - 18a^2x^3 + 47a^3x^2 - 44a^4x + 12a^5 = 0$;

d) $32x^4 - 192x^3 - 14x^2 + 87x - 18 = 0$;

e) $6x^5 - 17x^4 - 22x^3 - 24x^2 - x + 4 = 0$.

33. Să se afle rădăcinile fracționare ale ecuației

$$x^3 - 1969x^2 + 157652x + 144653 = 0.$$

34. Să se rezolve sistemele următoare:

a) $x^3 + y^3 = 133,\quad 2x + y = 9$;

b) $x^2 + 2y + 5 = 0,\quad 4y^2 + 15x - 51 = 0$ (interpretare geometrică);

c) $x + y + z = 3,\quad xy + yz + zx = -18,\quad xyz = -40$;

d) $x + y + z + u = 0,\quad xy + xz + xu + yz + yu = -2,$
$xyz + xyu + xzu + yzu = 11,\quad xyzu = -30$;

e) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0,\quad x^2 + y^2 + 2x - y = 0$ (interpretare geometrică);

f) $4x^2 + 8x - 3y - 3 = 0,\quad 8x^2 + 9y^2 - 16x - 73 = 0$ (interpretare geometrică);

g) $3x^2 + 8y^2 = 35,\quad 2x^2 - 9x - 2y + 11 = 0$ (interpretare geometrică).

35. O ecuație algebrică cu coeficienți întregi în care primul coeficient este 1 poate avea rădăcini fracționare?

36. a) Să se determine numărul raţional m astfel încît ecuaţia

$$2x^3 - x^2 + mx + 1 = 0$$

să aibă o rădăcină fracţionară; b) Aceeaşi problemă dacă se cere ca m să fie real, nu neapărat raţional.

37. Să se demonstreze cu ajutorul formulei de rezolvare a ecuaţiei de gradul II că, dacă p şi q sînt numere întregi, ecuaţia $x^2 + px + q = 0$ nu poate avea rădăcini fracţionare.

38. a) Se constată pe toate exemplele că, dacă $\frac{p}{q} \in Q$ este o rădăcină a ecuaţiei algebrice cu coeficienţi întregi $P(x) = 0$, cîtul $P(x) : \left(x - \frac{p}{q}\right)$ este un polinom cu coeficienţi întregi. Să se demonstreze că acest lucru se întîmplă totdeauna. b) Se constată, de asemenea, că toţi coeficienţii cîtului sînt divizibili prin q. Să se demonstreze că şi acest lucru se întîmplă totdeauna.

39. Suma pătratelor primelor n numere naturale consecutive este 385. Să se afle n.

40. Primul termen al unei progresii geometrice este 5; suma primilor patru termeni este 425. Să se determine progresia.

41. Primul termen al unei progresii aritmetice este 3. Să se determine raţia ei astfel încît produsul primilor patru termeni să fie 3465.

42. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic (exprimate în cm) formează o progresie aritmetică cu raţia 2; volumul paralelipipedului este de 315 cm³. Să se afle dimensiunile lui.

43. Într-un triunghi dreptunghic, proiecţia pe ipotenuză a uneia dintre catete este cu 9 cm mai mare decît a celeilalte. Aria triunghiului este de 45 cm². Să se afle proiecţia catetei mai mici.

44. Într-un paralelipiped dreptunghic, una dintre laturile bazei este cu 1 cm mai lungă decît cealaltă, înălţimea paralelipipedului este egală cu diagonala bazei, iar volumul de 60 cm³. Se cer dimensiunile paralelipipedului.

45. Volumul unui cilindru circular drept este de 45π cm³, aria sa totală este de 48π cm². Se cer raza şi înălţimea cilindrului.

46. Un corp are forma unui cilindru la care una din baze este înlocuită cu o emisferă de aceeaşi rază cu cilindrul situată în exterior. Înălţimea cilindrului este de 10 cm, iar volumul corpului este de 504π cm³. Se cere raza cilindrului.

47. Descompunerea unui polinom cu coeficienţi reali în factori reali ireductibili este unică?

48. Să se scrie sub formă de produs de factori liniari şi de gradul II cu coeficienţi reali polinoamele care au rădăcinile următoare:

a) $z_1 = 3$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_3 = 2 - 5i$;

b) $z_1 = z_2 = 1 + i$, $z_3 = z_4 = 1 - i$, $z_5 = \frac{2}{3}$;

c) $z_1 = 2 + \sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2}$, $z_3 = z_4 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_5 = z_6 = 2 - i\sqrt{3}$.

49. Să se descompună în factori reali ireductibili polinoamele de la exerciţiile: 23 a, 23 c, 23 d, 23 f, 31 a, 31 b, 31 c, 32 a—32 c.

50. Să se simplifice fracţiile următoare:

a) $\frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$; b) $\frac{8x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 5x - 2}{24x^3 - 22x^2 + x + 2}$;

c) $\frac{4x^5 - x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 3}{3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$; d) $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{2x^3 - 13x^2 + 26x - 10}$.

51. Se poate formula o teoremă analogă cu cea de la 3.4.3 cu privire la un polinom cu coeficienţi raţionali — folosind faptul că rădăcinile sale iraţionale pătratice sînt conjugate două cîte două?

52. Să se studieze semnele polinoamelor de la exerciţiile 32 a — 32 c.

53. Să se studieze semnele fracţiilor următoare.
Răspunsul se va da sub forma de tabel ca la 3.4.5.

a) $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{(x - 3)^2(x + 4)}$; b) $\frac{(x + 1)^3(x - 2)}{(x - 1)(x - 5)^2}$;

c) $\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}$; d) $\frac{2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{4x^4 + 5x^2 - 7x + 2}$.

54. Să se studieze semnul polinomului

$$P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i.$$

Rădăcinile sînt: $1 + i$, $1 - i$ şi i.

55. Ce se poate spune despre semnul unui polinom $P(x)$ cu coeficienţi reali care are numai rădăcini imaginare?

56. Pe exemplul de la 3.4.5 se constată că: a) un polinom $P(x)$ cu coeficienţi reali păstrează acelaşi semn cînd x variază între două rădăcini consecutive; b) el îşi schimbă semnul cînd x trece printr-o rădăcină. Aceste fapte sînt totdeauna adevărate?

CAPITOLUL IV

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR

4.0. INTRODUCERE

Am arătat (2.0) că nu există formule de rezolvare a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decît patru. Pentru ecuațiile de gradul III și IV există astfel de formule, dar ele prezintă unele inconveniente care fac ca ele să fie puțin utile în practică.

În această situație, nu rămîne decît să se găsească metode de a rezolva fiecare ecuație în parte.

În cele ce urmează vom trata aceste metode.

În acest capitol ne vom ocupa numai de ecuații cu coeficienți reali și vom căuta numai rădăcinile lor reale. Dat fiind că vom face apel numai la faptul că funcțiile care intervin sînt derivabile pe toată mulțimea lor de definiție, eventual cu excepția unui număr finit de puncte, metodele pe care le vom expune sînt valabile pentru orice ecuație $f(x)=0$ în care f este o funcție reală de o variabilă reală, derivabilă.

4.1. SEPARAREA RĂDĂCINILOR PRIN METODA GRAFICĂ

4.1.1. Ce înseamnă a separa rădăcinile unei ecuații. Un prim pas în rezolvarea unei ecuații se face dacă se află cîte rădăcini are și se indică pentru fiecare rădăcină un interval în care se află. Această lucrare se numește *separarea rădăcinilor ecuației*. De exemplu, fiind

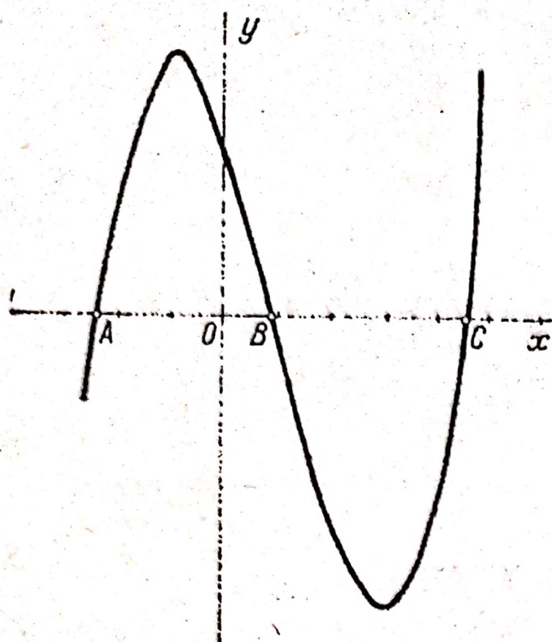


Fig. 2.

dată o ecuație, dacă stabilim că are trei rădăcini, una în intervalul (—4,—3), alta în intervalul (1, 2) și a treia în intervalul (5, 6), am separat rădăcinile ecuației.

4.1.2. **Ecuații de forma** $f(x) = 0$. Fiind dată o ecuație $f(x) = 0$, se trasează curba a cărei ecuație este $y = f(x)$. Abscisele punctelor în care curba taie axa Ox sînt rădăcinile ecuației. Ele se citesc într-o primă aproximare pe grafic, iar intervalul se restrînge prin încercări, precum arată exemplele următoare.

4.1.3. **Exemple.** Să se separe rădăcinile ecuației

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0, \quad x \in R.$$

Derivata, $3x^2 - 6x - 9$, se anulează pentru $x_1 = -1$ și $x_2 = 3$. Tabloul variației este cel de mai jos, iar graficul se vede în figura 2 (s-a luat pe Oy o unitate de 3 ori mai mică decît pe Ox).

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$	$+\infty$

Pe o schiță cît de sumară, se vede că ecuația are trei rădăcini reale date de abscisele punctelor A, B și C.

Ca să găsim un interval mai mic pentru rădăcina dată de punctul A, introducem în polinomul dat valorile —2, —3,... pînă cînd obținem pentru $f(x)$ o valoare negativă. Calculele se fac cu ajutorul schemei lui Horner. Se găsește $P(-2) = 8 > 0$, $P(-3) = -17 < 0$; deci rădăcina se află în intervalul $(-3, -2)$. Pentru rădăcina a doua, graficul arată că ea se află între 0 și 3. Calculul dă $P(0) = 10 > 0$,

$P(1) = -1 < 0$, deci această rădăcină se află în intervalul $(0,1)$. Tot prin încercări se află că $P(4) = -10 < 0$, $P(5) = 15 > 0$, deci rădăcina a treia se găsește în intervalul $(4,5)$.

Am separat rădăcinile ecuației. Ecuația are trei rădăcini reale x_1, x_2, x_3.

$$x_1 \in (-3, -2),$$

$$x_2 \in (0,1), \; x_3 \in (4, 5).$$

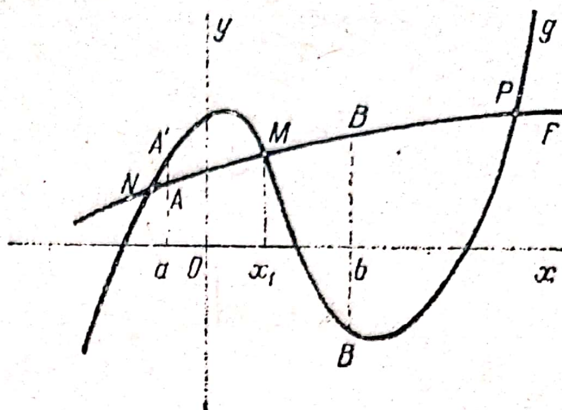


Fig. 3.

4.1.4. Ecuații de forma $f(x) = g(x)$. Considerăm o ecuație de forma

$$f(x) = g(x),$$

de exemplu

$$x^3 = x + 2, \qquad e^x = x^2 - x - 2 \text{ etc.}$$

unde $f(x)$ și $g(x)$ sînt două expresii care conțin variabila reală x și presupunem că funcțiile definite de ele pe R sau pe o submulțime a lui R sînt derivabile pe toată mulțimea de definiție afară, eventual, de un număr finit de puncte. Considerăm curbele f și g (fig. 3) ale căror ecuații sînt $y = f(x)$ și $y = g(x)$.

Cum putem găsi cu ajutorul acestor curbe rădăcinile ecuației?

Numărul a nu este rădăcină a ecuației, căci $f(a) < g(a)$, ordonata punctului A este mai mică decît ordonata punctului A'; nici b nu este rădăcină a ecuației căci $f(b) > g(b)$. În schimb, x_1 este rădăcină a ecuației, căci paralela la Oy prin punctul $(x_1, 0)$ taie ambele curbe în același punct M; $f(x_1) = g(x_1)$, ordonata punctului M. Abscisele punctelor N și P sînt de asemenea rădăcini ale ecuației considerate.

Rădăcinile ecuației $f(x) = g(x)$ sînt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor $y = f(x)$ și $y = g(x)$.

4.1.5. **Exemplu.** *Fiind dat un cerc cu centrul O, să se găsească un arc al său AB astfel încît coarda AB să împartă sectorul AOB în două părți echivalente**

* Această problemă a fost tratată chiar de Euler.

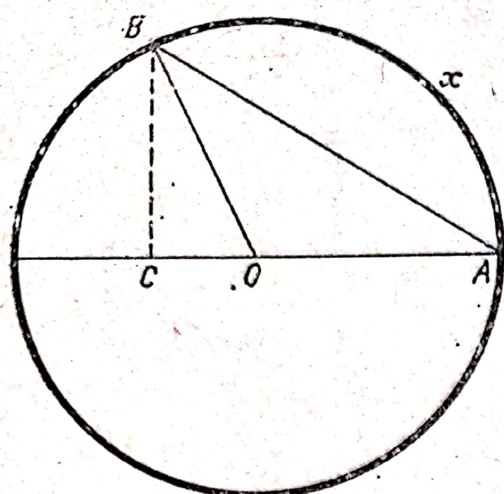


Fig. 4.

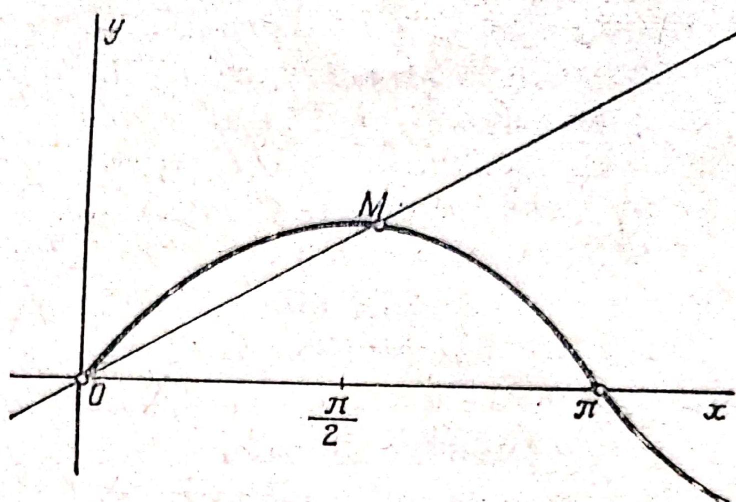


Fig. 5.

Condiția din enunțul problemei este echivalentă cu aceea ca aria triunghiului AOB să fie jumătate din aria sectorului OAB (fig. 4). Fie R raza cercului și x măsura în radiani a arcului căutat AB.

$$\text{aria triunghiului } AOB = \frac{OA \cdot BC}{2} = \frac{R \cdot R \sin x}{2} = \frac{R^2 \sin x}{2};$$

$$\text{aria sectorului } OAB = \frac{(\text{lungimea arcului } AB) \cdot \text{raza}}{2} = \frac{Rx \cdot R}{2} = \frac{R^2 x}{2}.$$

Condiția este

$$\frac{R^2 \sin x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 x}{2}$$

sau

$$\sin x = \frac{x}{2}.$$

Sîntem în cazul considerat, ecuația este de forma $f(x) = g(x)$ cu $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{x}{2}$.

În figura 5 se văd graficele funcțiilor $\sin x$ și $\frac{x}{2}$, $x \in R$. Ele se taie într-un singur punct M, a cărui abscisă este cuprinsă între $\frac{\pi}{2}$ și π. Ecuația are o singură soluție situată în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ecuația din acest exemplu nu este algebrică pentru că $\sin x - \frac{x}{2}$ nu este un polinom; este o ecuație *transcendentă*.

4.1.6. **Observări.** 1) Forma $f(x) = 0$, este un caz particular al formei $f(x) = g(x)$, şi anume cazul în care $g(x)$ este funcţia constantă zero. Graficul acestei funcţii este axa Ox; ea joacă acum rolul curbei $y = g(x)$.

2) Metoda expusă aici se poate aplica uneori cu folos şi atunci cînd ecuaţia dată are forma $f(x) = 0$. Astfel, ecuaţia $x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$ (de la 4.1.3) se poate pune sub forma

$$x^3 - 3x^2 = 9x - 10.$$

Atunci rădăcinile ei sînt abscisele punctelor de intersecţie ale curbei $y = x^3 - 3x^2$ cu dreapta $y = 9x - 10$.

Ecuaţia poate fi pusă şi sub forma

$$x^3 = 3x^2 + 9x - 10.$$

Dacă avem curba $y = x^3$ gata trasată (ceea ce ar fi util atunci cînd avem de rezolvat multe ecuaţii de gradul III), căutăm punctele ei de intersecţie cu parabola $y = 3x^2 + 9x - 10$, care se construieşte uşor.

4.1.7. **Discuţia unei ecuaţii care depinde de un parametru.** Considerăm, de exemplu, ecuaţia

$$P(x) = x^3 - ax^2 + a = 0, \tag{1}$$

în care a reprezintă un număr real variabil. De fapt, avem aici o infinitate de ecuaţii. Pentru $a = 1, 2, 3, \ldots$ avem, respectiv, ecuaţiile $x^3 - x^2 + 1 = 0$, $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$, $x^3 - 3x^2 + 3 = 0, \ldots$ A discuta ecuaţia propusă în raport cu parametrul a înseamnă a găsi cîte rădăcini reale are fiecare dintre aceste ecuaţii.

Rezolvăm ecuaţia în raport cu a:

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = a. \tag{2}$$

Ecuaţia (2) este echivalentă cu (1). În adevăr, ecuaţia (2) se obţine din (1) împărţind ambele părţi din (1) prin $x^2 - 1$ (şi trecînd a în partea dreaptă). Or, $P(1) = 1 \neq 0$, $P(-1) = -1 \neq 0$, deci 1 şi -1 nu sînt rădăcini ale ecuaţiei (1), deci $x^2 - 1 \neq 0$.

Urmează să studiem ecuaţia (2). Ea are forma $f(x) = g(x)$, unde

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1},\ g(x) = a,\ x \in R \setminus \{-1, 1\}$$

(g este funcţia constantă $g : R \to R$, cu $g(x) = a$ pentru orice $x \in R$).

Construim curbele $y = f(x)$ şi $y = g(x)$.

Pentru prima curbă, avem:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Tabloul de variație este cel de mai jos, iar curba se vede în figura 6. Ea are prima bisectoare ca asimptotă, un maxim în punctul $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ și un minim în punctul $B\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1				1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

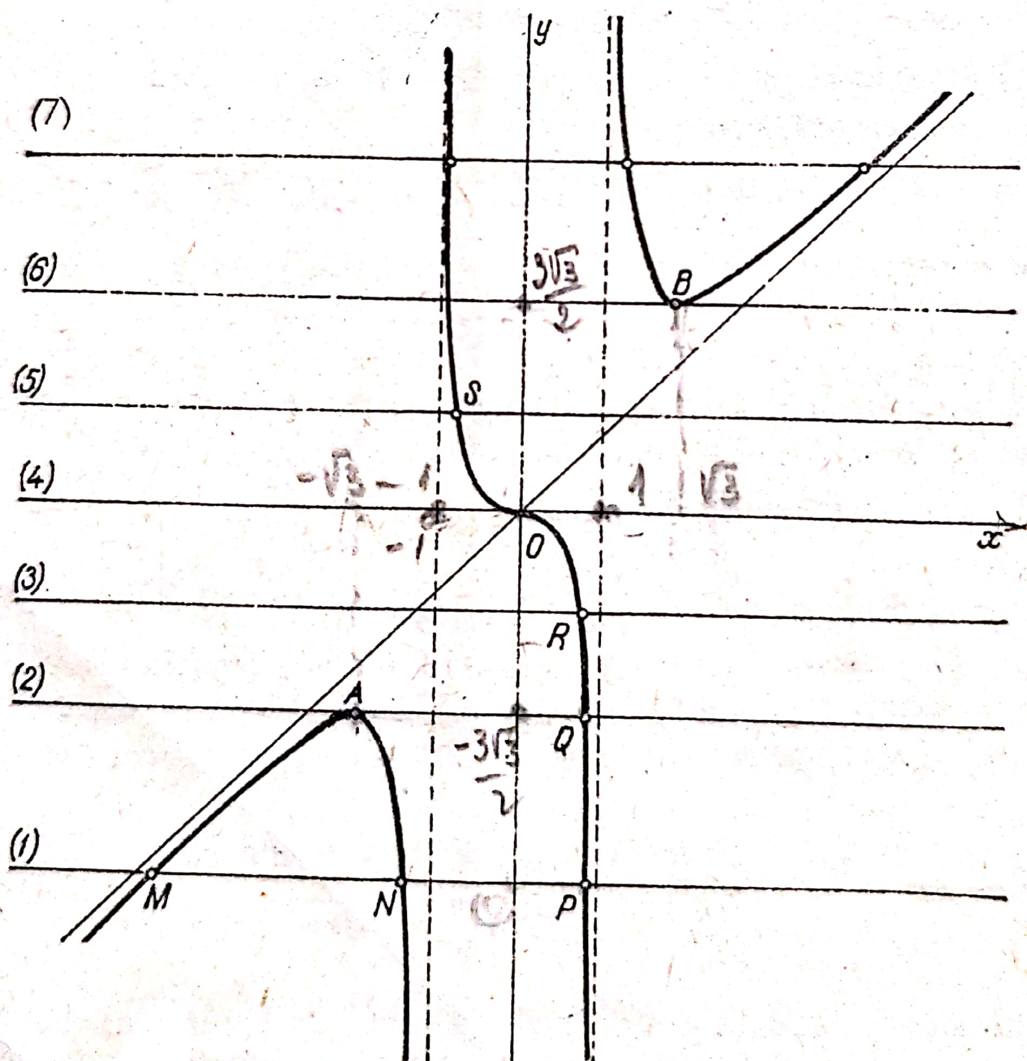


Fig. 6.

Curba $y = g(x) = a$ este o dreaptă paralelă cu axa Ox, de exemplu cea notată cu (1) în figura 6. Rădăcinile reale ale ecuației propuse sînt abscisele punctelor de intersecție ale acestei drepte cu curba. Dacă dreapta are poziția (1), ecuația are trei rădăcini reale, și anume abscisele punctelor M, N și P. Cît despre intervalele în care se găsesc aceste rădăcini, una, dată de abscisa punctului M, este undeva la stînga punctului $-\sqrt{3}$, adică la intervalul $(-\infty, -\sqrt{3})$, o altă rădăcină, abscisa punctului N, se află în intervalul $(-\sqrt{3}, -1)$, iar a treia rădăcină, abscisa punctului P, se află în intervalul $(0,1)$.

Rămîne acum să studiem cum variază numărul punctelor de intersecție a dreptei cu curba atunci cînd dreapta se deplasează rămînînd paralelă cu axa Ox.

Dreapta (2) corespunde cazului cînd $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cîtă vreme $a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, adică dreapta mobilă se află sub dreapta (2), ca de exemplu dreapta (1) ecuația are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare dintre intervalele $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(0, 1)$. Cînd dreapta mobilă coincide cu dreapta (2), adică $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, ea are două puncte comune cu curba: punctul A, de abscisă $-\sqrt{3}$ și punctul Q a cărui abscisă se află în intervalul $(0, 1)$, deci ecuația are o rădăcină egală cu $-\sqrt{3}$ și alta situată în intervalul $(0, 1)$.

Rădăcina $-\sqrt{3}$, care corespunde punctului A în care dreapta este tangentă la curbă, este o rădăcină dublă.

În adevăr, să considerăm ecuația (2) pentru cazul cînd $a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ea este

$$F(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$F(-\sqrt{3}) = 0$ căci $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ este tocmai valoarea fracției $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ pentru $x = -\sqrt{3}$. Apoi $F'(x) = f'(x)$, căci $F(x)$ diferă de $f(x)$ printr-o constantă. Or $-\sqrt{3}$ este o rădăcină a derivatei $f'(x)$, deci $F'(-\sqrt{3}) = 0$. Așadar, $x = -\sqrt{3}$ este rădăcină a ecuației $F(x) = 0$ și a derivatei $F'(x) = 0$; se verifică ușor că $F''(-\sqrt{3}) \neq 0$.

Cînd dreapta ajunge în poziţia (3), adică ea este mai sus de punctul A, dar mai jos de O, adică $-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$, ecuaţia are o singură rădăcină, dată de abscisa punctului R, situată în intervalul $(0,1)$ ş.a.m.d.

Discuţia se rezumă în tabloul următor:

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei şi intervalele în care se găsesc**
(1)	$a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -1), (0, 1)$
(2)	$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}, (0, 1)$
(3)	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$	$(0, 1)$
(4)	$a = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$**
(5)	$0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-1, 0)$
(6)	$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = \sqrt{3}, (-1, 0)$
(7)	$a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$(-1, 0), (1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$

În cazul (2) ecuaţia poate fi rezolvată pînă la capăt. Polinomul

$$P(x) = x^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

* Nu am mai menţionat care este numărul rădăcinilor. Dacă se indică, de exemplu, trei intervale, se înţelege de la sine că ecuaţia are trei rădăcini, cîte una în fiecare dintre intervalele indicate.

** Cu privire la forma curbei în vecinătatea unui punct în care ecuaţia are o rădăcină triplă, vezi capitolul II, problema nr. 76.

$\left(\text{am înlocuit } a \text{ prin } -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ se împarte prin $x+\sqrt{3}$, folosind schema lui Horner, cîtul se împarte din nou prin $x+\sqrt{3}$ și rămîne ecuația $x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$, care dă $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Această rădăcină se găsește în adevăr în intervalul (0, 1) — cum s-a prevăzut. Așadar, dacă $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ecuația are rădăcinile

$$x_1=x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În mod analog se află că, dacă $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, rădăcinile ecuației sînt

$$x_1=x_2=\sqrt{3},\ x_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.1.S. **Alt exemplu.** *Să se discute în raport cu parametrul a ecuația transcendentă*

$$e^x=ax.$$

Metoda I. Construim curbele $y=e^x$ și $y=ax$. Prima este curba exponențială (fig. 7), iar a doua este o dreaptă de pantă a, care trece prin origine. Cînd a variază, dreapta se rotește în jurul originii. Se vede pe grafic că sînt posibile patru cazuri: 1) dreapta nu taie curba, 2) dreapta este tangentă la curbă, 3) dreapta taie curba în două puncte, 4) dreapta taie curba într-un singur punct. Trebuie să aflăm pentru ce valoare a lui a dreapta este tangentă la curbă. Fie (u, e^u) un punct oarecare al curbei. Panta tangentei la curbă în acest punct este derivata funcției în punctul u, adică e^u, deci ecuația tangentei este

$$y-e^u=e^u(x-u);$$
$$e^ux-y+e^u(1-u)=0.$$

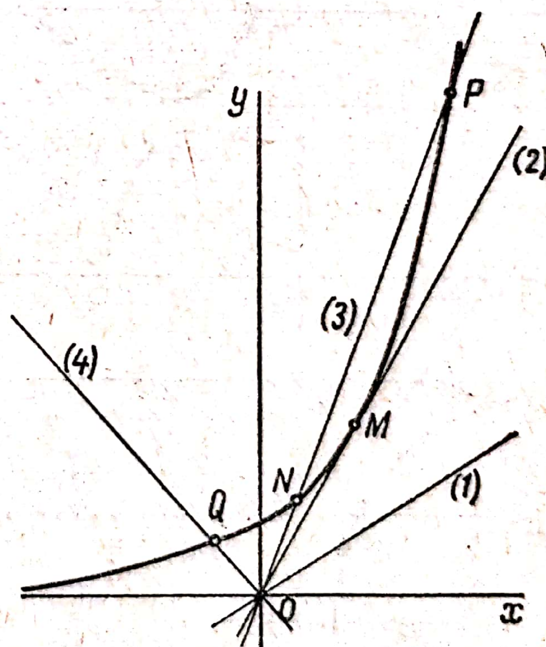


Fig. 7

Condiția ca tangenta să treacă prin origine este $e^u(1-u)=0$ (am anulat termenul liber), adică $u=1$.

Deci panta tangentei din origine la curbă este $e^1=e$; dreapta $y=ax$ este tangentă la curbă dacă $a=e$. Coordonatele punctului de contact M sînt $x=1$, $y=e$.

Acum avem toate elementele pentru a face discuția.

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor și intervalele în care se găsesc*
(1)	$0 \leqslant a < e$	nici o rădăcină
(2)	$a=e$	$x=1$ (abscisa punctului M*)
(3)	$a>e$	$(0, 1)$, $(1, \infty)$ (abscisele punctelor N și P)
(4)	$a<0$	$(-\infty, 0)$ (abscisa punctului Q)

Metoda II. Punem ecuația sub forma

$$\frac{e^x}{x}=a.$$

Construim curba

$$y=f(x)=\frac{e^x}{x}$$

și o tăiem cu dreapta variabilă $y=a$.

Funcția f este definită pe $R\setminus\{0\}$. Derivata, $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ se anulează pentru $x=1$. Tabloul de variație este cel de la pagina 117, curba se vede în figura 8.

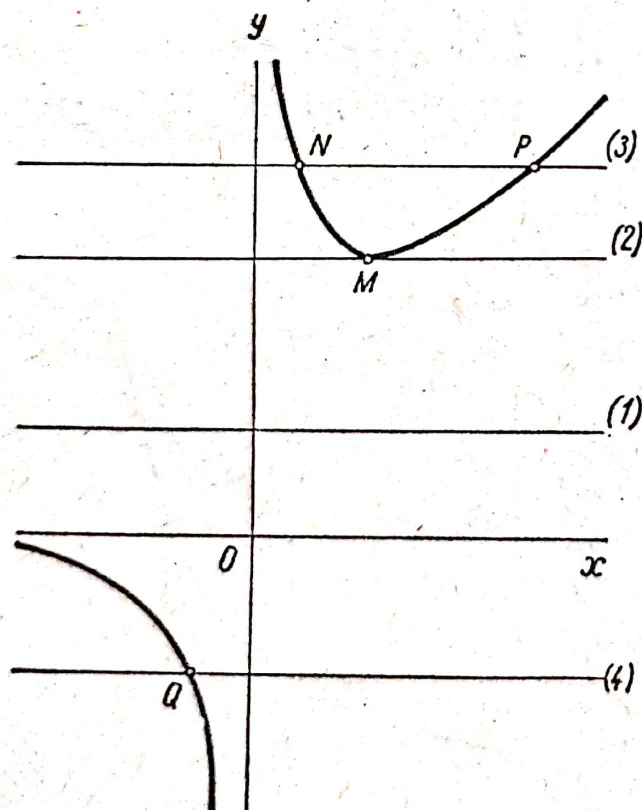


Fig. 8

* $x=1$ nu este o rădăcină dublă. Noțiunea de rădăcină multiplă se definește numai pentru ecuații algebrice.

x	$-\infty$		0		1	∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow \infty$

Trebuie să deosebim 4 cazuri indicate în figură. Rezultatul discuției concordă cu cel precedent. Dreptele au fost numerotate la fel ca în soluția precedentă, de asemenea și punctele M, N, P, Q care indică rădăcinile ecuației.

4.1.9. **Condiția ca rădăcinile să fie într-un interval dat.** *Să se discute ecuația*

$$\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha + a = 0$$

în raport cu parametrul real a.

Înlocuim $\cos^2\alpha$ prin $1 - \sin^2\alpha$ și punem $\sin\alpha = x$. Ecuația devine

$$x^3 - 3x^2 + a + 3 = 0$$

Pentru ca o rădăcină a acestei ecuații să satisfacă ecuația propusă, nu este suficient ca ea să fie reală: ea trebuie să fie cuprinsă în intervalul închis $[-1, 1]$, deoarece $\sin\alpha$ ia numai valori din acest interval. De aceea ecuația trebuie considerată pe intervalul $[-1, 1]$.

Procedăm la început ca în exemplul precedent. Punem ecuația sub forma

$$x^3 - 3x^2 = -a - 3$$

și construim graficul funcției $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in R$. Derivata $f'(x) = 3x^2 - 6x$ se anulează pentru $x = 0$ și $x = 2$. Tabloul variației este cel de la pagina 118 iar curba se vede în figura 9.

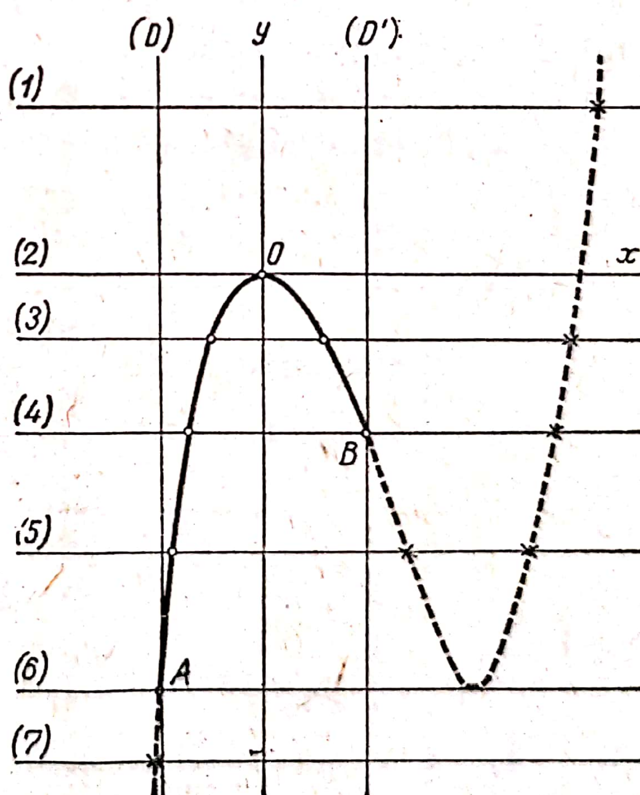


Fig. 9

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	−4	↗	∞

Ne interesează restricţia acestei funcţii pe intervalul $[-1, 1]$. Graficul ei este arcul de curbă AB cuprins între dreptele (D) şi (D'), $x = 1$ şi $x = -1$.

$$f(-1) = -4, \ f(1) = -2.$$

Deci coordonatele punctului A sînt $x = -1$, $y = -4$, coordonatele punctului B sînt $x = 1$, $y = -2$.

Urmează să tăiem curba cu dreapta mobilă $y = -a - 3$.

Figura arată că trebuie să deosebim cazurile următoare:

1) dreapta mobilă este deasupra axei Ox; 2) ea coincide cu axa Ox; 3) ea se află sub axa Ox dar mai sus decît punctul B; 4) dreapta trece prin punctul B; 5) ea se găseşte sub punctul B, dar mai sus decît punctul A; 6) ea trece prin punctul A; 7) dreapta se află sub punctul A.

Cazul 1) este caracterizat prin $y = -a - 3 > 0$, deci $a < -3$; cazul 2) este caracterizat prin $y = -a - 3 = 0$, deci $a = -3$; cazul 3) prin $-2 < -a - 3 < 0$, deci $-3 < a < -1$; ş.a.m.d.

Rădăcinile ecuaţiei sînt abscisele punctelor de intersecţie ale arcului de curbă AB cu dreapta $y = -a - 1$.

Rezultatul discuţiei este redat în tabloul de mai jos:

	Valorile lui a	*Numărul rădăcinilor şi intervalele în care se găsesc*
(1)	$a < -3$	nici o rădăcină
(2)	$a = -3$	$x_1 = x_2 = 0$,
(3)	$-3 < a < -1$	$(-1, 0)$, $(0, 1)$
(4)	$a = -1$	$x_1 = 1$, $x_2 \in (-1, 0)$
(5)	$-1 < a < 1$	$(-1, 0)$
(6)	$a = 1$	$x = -1$
(7)	$a > 1$	nici o rădăcină

4.2. SEPARAREA RĂDĂCINILOR PE BAZA TEOREMEI LUI ROLLE*

4.2.1. **Teorema lui Rolle.** Amintim teorema lui Rolle cunoscută de la analiză. „Fie f o funcție definită pe un interval I și a, b două puncte din I cu $a < b$. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;
2) f este derivabilă pe intervalul deschis $(a\ b)$;
3) f are valori egale în a și b, $f(a) = f(b)$; atunci există (cel puțin) un punct c între a și b, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$".

Interpretarea geometrică a acestei teoreme este dată de figura 10. A și B fiind puncte ale graficului funcției f cu aceeași ordonată, există între a și b cel puțin un punct c în care funcția are un maxim sau un minim (în cazul figurii există trei puncte de extrem c_1, c_2 și c_3).

Un caz particular important este cel în care $f(a) = f(b) = 0$ (fig. 11) și funcția nu se anulează între a și b. Atunci a și b sînt două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ și c este o rădăcină a derivatei $f'(x) = 0$. În acest caz teorema se poate enunța (simplificat) astfel:

Între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x) = 0$. Simbolic.

$[f(a) = 0,\ f(b) = 0] \Rightarrow [\exists\ c,\ c \in (a,\ b)$ astfel încît $f'(c) = 0]$.

4.2.2. **O proprietate a funcțiilor continue.** Fie f o funcție continuă pe un interval închis $[x_1, x_2]$, $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$ valorile funcției f la capetele acestui interval, și y_3 un număr cuprins între y_1 și y_2 $(y_1 < y_3 < y_2)$. În intervalul (x_1, x_2) există cel puțin un punct x_3 astfel încît să avem $y_3 = f(x_3)$

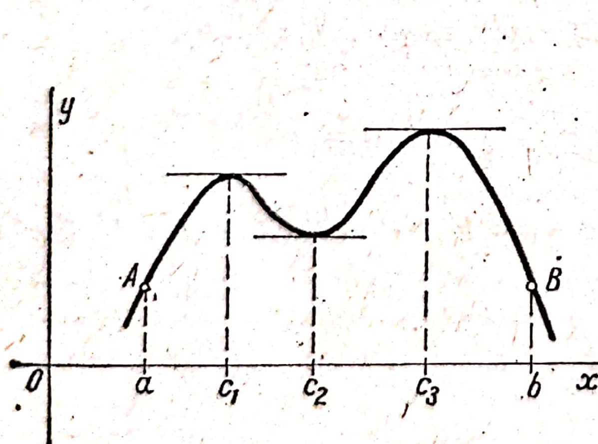


Fig. 10.

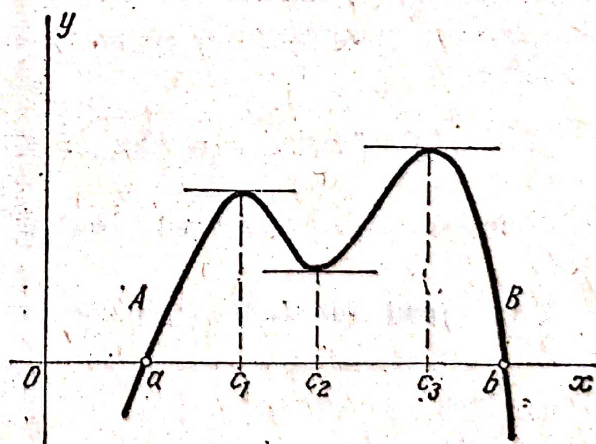


Fig. 11.

* Programa prevede pentru separarea rădăcinilor metoda grafică sau cea bazată pe teorema lui Rolle.

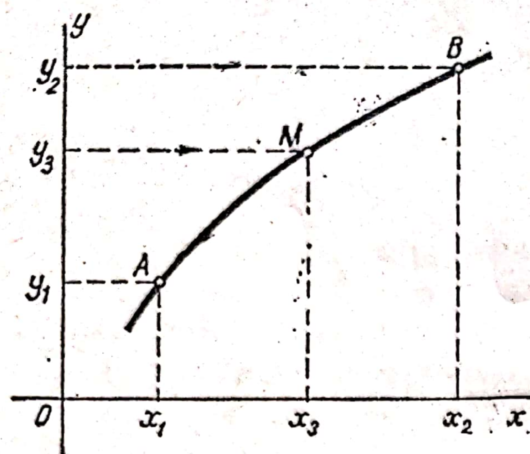


Fig. 12.

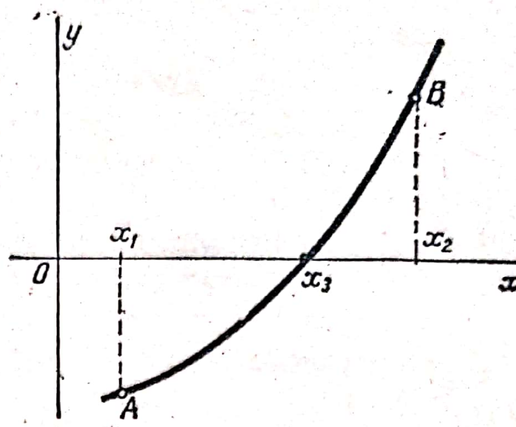


Fig. 13.

În figura 12 se dă o justificare intuitivă a acestei teoreme.

Fie arcul AB graficul funcției f în intervalul $[x_1, x_2]$ și y_3 un punct oarecare situat între y_1 și y_2. Ducem prin y_3 o paralelă la Ox. Arcul AB fiind neîntrerupt, această paralelă trebuie să-l întîlnească într-un punct (sau în mai multe). Fie M acest punct. Ducem prin M o paralelă la Oy; ea va tăia Ox într-un punct x_3 situat între x_1 și x_2. Deci, există un punct $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(x_3) = y_3$.

Un enunț simplificat al acestei teoreme este: *o funcție continuă nu trece de la o valoare la alta fără să treacă prin toate valorile intermediare.*

Un caz particular important este cînd $f(x_1)$ și $f(x_2)$ sînt de semne contrare și se ia $y_3 = 0$ (fig. 13). În intervalul (x_1, x_2) există cel puțin un punct x_3 astfel încît $f(x_3)$ să fie egal cu zero.

Dacă funcția f este continuă pe un interval închis $[x_1, x_2]$ și $f(x_1)\, f(x_2) < 0$, există între x_1 și x_2 cel puțin un punct x_3 astfel încît să avem $f(x_3) = 0$.*

Simbolic,

$$[f(x_1)\, f(x_2) < 0] \Rightarrow [\exists x_3,\ x_3 \in (x_1, x_2) \text{ astfel încît } f(x_3) = 0].$$

Enunț simplificat: *o funcție continuă nu poate să-și schimbe semnul fără să se anuleze.*

4.2.3. Șirul lui Rolle. Considerăm o ecuație

$$f(x) = 0$$

---

* Pentru a exprima că două numere reale x și y sînt de semne contrare, se scrie că $xy < 0$, pentru a exprima că ele sînt de același semn, se scrie că $xy > 0$, iar pentru a exprima că unul din ele este egal cu zero, se scrie că $xy = 0$.

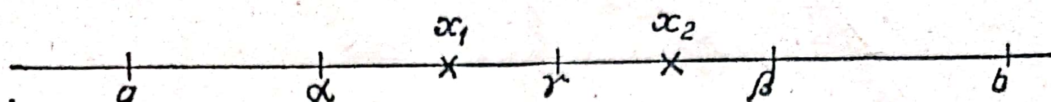


Fig. 14.

unde f este o funcţie derivabilă (deci şi continuă) într-un interval (a, b). Fie α şi β (fig. 14) două rădăcini *consecutive* ale derivatei $f'(x) = 0$, $\alpha, \beta \in (a, b)$. Cîte rădăcini poate avea ecuaţia $f(x) = 0$ între α şi β?

Dacă între α şi β ar exista două rădăcini, x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $f(x) = 0$, atunci, conform teoremei lui Rolle, între x_1 şi x_2 ar exista cel puţin un punct, să-l numim γ, în care derivata se anulează, $f'(\gamma) = 0$. Dar atunci α şi β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. Rezultă că, *între α şi β există cel mult o rădăcină a ecuaţiei.*

Sînt două posibilităţi: 1) între α şi β există o singură rădăcină a ecuaţiei, 2) între α şi β nu există nici o rădăcină a ecuaţiei. Totul depinde de valorile funcţiei f în punctele α şi β. Va trebui să deosebim trei cazuri.

a) $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$. Funcţia f fiind continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, ultima propoziţie 4.2.2. arată că ecuaţia $f(x) = 0$ are în intervalul (α, β) cel puţin o rădăcină. Dar două sau mai multe rădăcini nu pot exista. Rezultă că în acest caz, *ecuaţia are în intervalul (α, β) o singură rădăcină.*

b) $f(\alpha)\, f(\beta) > 0$. Considerăm, de exemplu (fig. 15), cazul cînd $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) > 0$, $f(\alpha) < f(\beta)$. Să presupunem că ecuaţia ar avea în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. În punctul x_1 funcţia f ia valoarea zero, $f(x_1) = 0$, în punctul β funcţia ia valoarea $f(\beta) > 0$, şi am presupus că $f(\alpha) < f(\beta)$, deci $f(\alpha)$ este cuprins între $f(x_1)$ şi $f(\beta)$. Funcţia f fiind continuă pe intervalul $[\alpha, \beta]$, este continuă şi pe $[x_1, \beta]$, deci putem să-i aplicăm prima propoziţie de la 4.2.2: în intervalul (x_1, β) există cel puţin un punct x_1' astfel încît să avem $f(x_1') = f(\alpha)$. Teorema lui Rolle aplicată intervalului $[\alpha, x_1']$ arată că în acest interval există cel puţin un punct γ în care derivata se anulează, $f'(\gamma) = 0$. Atunci α şi β nu mai sînt rădăcini consecutive ale derivatei — ceea ce este contrar ipotezei. Contradicţia provine de la faptul că am admis că ecuaţia are în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. Rezultă că ecuaţia nu are în intervalul (α, β) nici o rădăcină.

Dacă $f(\alpha) > f(\beta)$ raţionamentul se poate repeta întocmai, cu singura deosebire că $f(\beta)$ este cuprins între $f(x_1)$, care este egal cu zero, şi $f(\alpha)$ şi se foloseşte faptul că funcţia f este continuă în intervalul $[\alpha, x_1']$, apoi se aplică teorema lui Rolle în intervalul $[x_1', \beta]$.

Cazul $f(\alpha) = f(\beta)$ este exclus, căci, în acest caz, conform teoremei lui Rolle, între α şi β s-ar găsi o rădăcină a derivatei, deci α şi β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. La acelaşi rezultat se ajunge dacă se presupune că $f(\alpha) < 0$

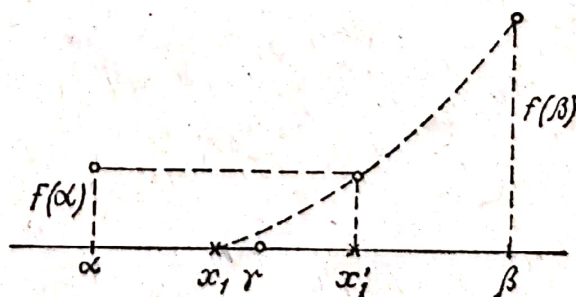


Fig. 15.

și $f(\beta) < 0$. Așadar, *dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *au același semn, ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

c) $f(\alpha) = 0$ sau $f(\beta) = 0$. Considerăm, de exemplu, cazul cînd $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) > 0$. Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ ar avea în intervalul (α, β) o rădăcină x_1. Teorema lui Rolle, aplicată în intervalul (α, x_1) arată că în acest interval există cel puțin un punct γ în care derivata se anulează, deci α și β n-ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei. Rezultă că, în acest caz, *ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

Așadar, α și β *fiind două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *sînt de semne contrare, ecuația are în intervalul* (α, β) *o singură rădăcină; dacă* $f(\alpha)$ *și* $f(\beta)$ *sînt de același semn, sau* $f(\alpha) = 0$ *sau* $f(\beta) = 0$, *ecuația nu are în intervalul* (α, β) *nici o rădăcină.*

Rămîne să vedem cîte rădăcini are ecuația mai mici decît cea mai mică rădăcină și cîte mai mari ca cea mai mare rădăcină a derivatei.

Fie α_1 cea mai mică rădăcină a derivatei. Dacă ecuația ar admite două rădăcini, x_1 și x_2, mai mici decît α_1 (fig. 16), conform teoremei lui Rolle, derivata s-ar anula pentru o valoare γ cuprinsă între x_1 și x_2, deci $\gamma < \alpha_1$ și, prin urmare, α_1 n-ar mai fi cea mai mică rădăcină a derivatei. Rezultă că *ecuația are cel mult o rădăcină mai mică decît cea mai mică rădăcină a derivatei.*

Pentru a decide care din cele două cazuri posibile se produce, se fac asupra comportării funcției f în intervalul (a, α_1) considerațiile pe care le-am făcut mai înainte referitor la intervalul (α, β) determinat de două rădăcini consecutive ale derivatei (a joacă rolul lui α și α_1 al lui β) și se ajunge la aceeași concluzie ca mai înainte. Se poate spune că, în problema de care ne ocupăm, *extremitatea stîngă a intervalului* (a, b) *în care studiem funcția joacă același rol ca rădăcinile derivatei.*

Dar acum intervine $f(a)$ în loc de $f(\alpha)$ și se poate întîmpla ca funcția f să nu fie definită pentru $x = a$ sau a să fie $\pm\infty$. Atunci, în loc de $f(a)$, se ia $\lim_{x \to a} f(x)$, căci, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de a, $f(x)$ are același semn cu această limită. Pentru uniformitate, vom spune că $\lim_{x \to a} f(x)$ este valoarea funcției pentru $x = a$.

Se arată în mod analog că *extremitatea dreaptă* b *a intervalului în care se studiază ecuația joacă același rol ca rădăcinile derivatei.*

De aici rezultă următorul procedeu de separare a rădăcinilor unei ecuații $f(x) = 0$.



Fig. 16.

Se scriu în ordine crescătoare rădăcinile derivatei, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, precum şi extremităţile a şi b ale intervalului de definiţie a funcţiei f, iar dedesubt valorile corespunzătoare ale funcţiei.

x	a	x_1	$x_2 \ldots x_n$	b
$f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2) \ldots f(x_n)$	$\lim_{x\to b} f(x)$

Dacă la capetele unuia dintre intervalele (a, x_1), (x_1, x_2), ... (x_n, b) funcţia f ia valori de semne contrare (prezintă o variaţie), ecuaţia are în acel interval o singură rădăcină; dacă, însă, valorile funcţiei sînt de aceIaşi semn, sau una din ele este egală cu zero, ecuaţia nu are în acel interval nici o rădăcină.

Deoarece aceste intervale acoperă toată mulţimea de definiţie a funcţiei f, am separat rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

Rîndul al doilea din tabelul de mai sus se numeşte *şirul lui Rolle*.

Exemple

4.2.4. **Ecuaţie algebrică cu coeficienţi determinaţi.** *Să se separe rădăcinile ecuaţiei*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = 0.$$

Derivata, $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$, se anulează pentru $x = 0$, $x = -1$ şi $x = 2$. Formăm şirul lui Rolle.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+5$	$+10$	-22	$+\infty$

La extremităţile intervalului $(-\infty, -1)$ funcţia f are acelaşi semn, deci în acest interval ecuaţia nu are nici o rădăcină; în intervalul $(-1, 0)$, situaţia este aceeaşi; la extremităţile intervalului $(0, 2)$ funcţia are valori de semne contrare, $+10$ şi -22, deci în acest interval ecuaţia are o singură rădăcină; în intervalul $(2, \infty)$ situaţia este aceeaşi ca în intervalul precedent. Aşadar, ecuaţia propusă are două rădăcini reale, x_1 şi x_2,

$$x_1 \in (0, 2) \qquad x_2 \in (2, \infty).$$

Prin încercări (v. 4.1.3), aceste intervale se reduc la $(1, 2)$ şi $(2, 3)$. Celelalte două rădăcini sînt imaginare.

4.2.5. **Ecuaţie cu un parametru.** *Să se discute în raport cu parametrul real a rădăcinile reale ale ecuaţiei* (*v.* 4.2.4.)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0.$$

Şirul lui Rolle este:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$a - 5$	a	$a - 32$	$+\infty$

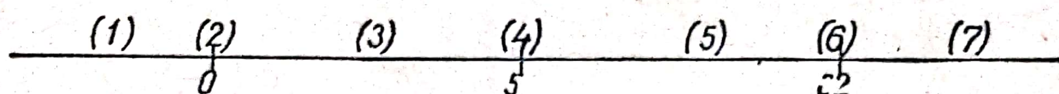


Fig. 17.

Ne interesează semnele expresiilor din rîndul al doilea. Ele sînt date de tabelele:

a	$-\infty$	5	$+\infty$
$a-5$	$-$	0	$+$

a	$-\infty$	0	$+\infty$
a	$-$	0	$+$

a	$-\infty$	32	$+\infty$
$a-32$	$-$	0	$+$

Valorile remarcabile ale parametrului a sînt: 5, 0 și 32. Pentru a ști cîte cazuri trebuie să deosebim, le scriem în ordine crescătoare (fig. 17). Trebuie să deosebim cazurile următoare: $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 5$, $a = 5$, $5 < a < 32$, $a = 32$, $a > 32$.

Discuția se face întocmind tabloul următor.

	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
a	$+\infty$	$a-5$	a	$a-32$	$+\infty$	concluzii
$a < 0$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$
$a = 0$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 0$, $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$
$0 < a < 5$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ $(0, 2)$, $(2, \infty)$
$a = 5$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -1$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$
$5 < a < 32$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$(0, 2)$, $(2, \infty)$
$a = 32$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 2$
$a > 32$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină reală

Iată cum se procedează:

La stînga liniei verticale se trec toate cazurile considerate, tabloul va avea în cazul de față 7 rînduri, iar deasupra liniei verticale se scrie șirul lui Rolle. Apoi se completează partea de mijloc a tabloului.

În prima coloană se scrie peste tot „+", căci $f(-\infty) = +\infty$ oricare ar fi valoarea lui a.

În coloana a doua, care corespunde lui $a - 5$, se pune zero în linia care corespunde lui $a = 5$, în rîndurile de deasupra se pune semnul „−", iar în cele de dedesubt semnul „+" pentru a exprima că $f(-1)$, adică $a - 5$, este egal cu zero cînd $a = 5$, negativ cînd $a < 5$, și pozitiv cînd $a > 5$.

În mod analog se completează celelalte coloane ale părții de la mijloc.

În partea a treia a tabloului se scriu concluziile. Fiecare rînd conține semnele șirului lui Rolle pentru cazul respectiv. În rîndul întîi, care corespunde cazului $a < 0$, apar două variații, cînd x trece de la $-\infty$ la -1 și de la 2 la ∞, la concluzii se scrie* că ecuația are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -1)$; $(2, \infty)$. În rîndul al doilea apare un zero în linia care corespunde cazului $a = 0$. Aceasta înseamnă că, dacă $a = 0$, valoarea $x = 0$, care este o rădăcină a derivatei, anulează și funcția, deci 0 este rădăcină multiplă de ordin $\geqslant 2$. Afară de aceasta, apar cîte o variație cînd x trece de la $-\infty$ la -1 și de la 2 la $+\infty$, ceea ce înseamnă că ecuația are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$. Aceste lucruri se înscriu la concluzii ș.a.m.d.

În cazul $a = 0$, ecuația este $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$. Ea are în adevăr rădăcina dublă $x = 0$. Celelalte rădăcini sînt $x_3 = \frac{2(1-\sqrt{10})}{3} = -1{,}44\ldots x_4 = \frac{2(1+\sqrt{10})}{3} = 2{,}84\ldots$, ele se găsesc în adevăr în intervalele prevăzute.

În cazul $a = 5$, ecuația este $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$. Se împarte (Horner) prin $(x+1)^2$ și rămîne de rezolvat ecuația $3x^2 - 10x + 5 = 0$. La fel se procedează pentru $a = 32$.

4.2.6. **Cazul cînd se cere ca rădăcinile să fie într-un interval dat.** Reluăm exemplul precedent,

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0,$$

dar punem condiția ca rădăcinile să fie cuprinse în intervalul $[-2, 3]$.

În locul funcției f definită pe R, ne interesează acum restricția ei pe intervalul $[-2, 3]$. Șirul lui Rolle este acum,

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	$a+32$	$a-5$	a	$a-32$	$a+27$

Rezultatul discuției este redat în tabloul următor:

a	-2	-1	0	2	3	concluzii
	$a+32$	$a-5$	a	$a-32$	$a+27$	
$a < -32$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	nici o rădăcină
$a = -32$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$x = -2$
$-32 < a < -27$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$(-2, -1)$
$a = -27$	$+$	$-$	$-$	$-$	0	$x_1 = 3$, $(-2, -1)$
$-27 < a < 0$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$(-2, -1)$, $(2, 3)$
$a = 0$	$+$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = 0$, $(-2, -1)$, $(2, 3)$
$0 < a < 5$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$
$a = 5$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	$x_1 = x_2 = -1$, $(0, 2)$, $(2, 3)$
$5 < a < 32$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$(0, 2)$, $(2, 3)$
$a = 32$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 2$
$a > 32$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	nici o rădăcină

* v. nota de la 4.1.7.

4.3. AFROXIMAREA RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII

4.3.1. Introducere. Dacă avem de rezolvat o ecuație $f(x) = 0$ vom presupune funcția f derivabilă pe intervalul considerat, deși această condiție nu este totdeauna necesară — și am separat rădăcinile ei, se pune problema de a le afla efectiv. De cele mai multe ori ele sînt iraționale, și trebuie aflată cîte o valoare aproximativă a fiecăreia, sub forma de fracție zecimală.

Fie x_1 o rădăcină a unei ecuații și x_1' o valoare aproximativă a ei. Dacă $x_1' < x_1$, se spune că x_1' este o valoare aproximativă *prin lipsă*, iar dacă $x_1' > x_1$ se spune că x_1' este o valoare aproximativă prin *adaos* sau prin *exces*. Este important să știm și cît de mult diferă valoarea aflată de cea adevărată, adică să cunoaștem o limită superioară a erorii. Dacă știm că un număr x este cuprins între două numere a și b, $a < x < b$, se ia pentru x valoarea aproximativă $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Atunci eroarea este sigur mai mică decît $x_1' - a$ și decît $b - x_1$. De exemplu, dacă se știe că $5{,}473 < x < 5{,}479$, se ia $x \approx x_1' = 5{,}476$; atunci eroarea este sigur mai mică decît $5{,}476 - 5{,}743 = 5{,}479 - 5{,}476 = 0{,}003$ și se scrie:

$$x = 5{,}476 \ (\pm\ 0{,}003).$$

Dacă media are o zecimală mai mult decît numerele a și b, ea se rotunjește. De exemplu, dacă se știe că x este cuprins între $a = 2{,}34$ și $b = 2{,}39$, deci $\frac{a+b}{2} = 2{,}365$ se ia $x_1 = 2{,}37$. În acest caz avem: $2{,}37 - 2{,}34 = 0{,}03$; $2{,}39 - 2{,}37 = 0{,}02$; pentru siguranță, se consideră că eroarea este mai mică decît $0{,}03$ și se scrie

$$x = 2{,}37 \ (\pm\ 0{,}03).$$

4.3.2. Fracționarea intervalelor. Să presupunem că am găsit două numere întregi consecutive, a și $a + 1$ între care se găsește o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ și

$$f(a) < 0,\ f(a + 1) > 0$$

de exemplu $f(2) < 0$, $f(3) > 0$. Aceste numere reprezintă deja cîte o valoare aproximativă a rădăcinii. Pentru a avea o aproximare mai bună, se încearcă

$$2{,}1 \quad 2{,}2 \quad 2{,}3 \ldots 2{,}9$$

pînă ce se obțin două valori consecutive ale lui x din acest șir pentru care funcția f are valori de semne contrare, de exemplu

$$f(2, 3) < 0, f(2, 4) > 0.$$

Bineînțeles nu este necesar să se meargă din zecime în zecime. Se poate începe cu 2,5, dacă $f(2, 5) > 0$, înseamnă că rădăcina se găsește între 2 și 2,5. Acum se încearcă 2,3 ș.a.m.d.

După ce s-a găsit prima zecimală, de exemplu s-a aflat că rădăcina se află între 2,3 și 2,4, procedeul se poate repeta: se calculează valorile funcției pentru

$$2{,}31 \quad 2{,}32 \quad 2{,}33 \ldots 2{,}39$$

ș.a.m.d.

Acest procedeu se numește *fracționarea intervalelor*.

4.3.3. **Exemplu.** Considerăm ecuația

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Trasînd curba $y = x^3 - 2x - 9$, sau prin șirul lui Rolle, se stabilește că ecuația are o singură rădăcină reală, în intervalul $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \infty\right)$. Apoi,

$$f(1) = -10, f(2) = -5, f(3) = 12.$$

Deoarece $f(2)$ și $f(3)$ sînt de semne contrare, rădăcina se află în intervalul (2, 3). Urmează să fracționăm acest interval. Calculăm întîi $f(2{,}5)$, obținem $f(2{,}5) = 1{,}625 > 0$, deci rădăcina se găsește în intervalul (2; 2,5). Acum calculăm pe rînd:

$$f(2{,}4) = 0{,}024, \qquad f(2{,}3) = -1{,}433.$$

Deoarece aceste două rezultate sînt de semne contrare, rădăcina se găsește în intervalul (2,3; 2,4).

Am putea continua, fracționînd intervalul (2,30, 2,40) ș.a.m.d.

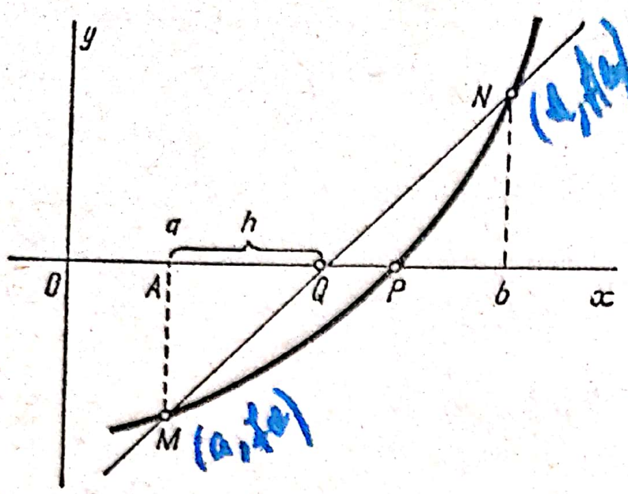


Fig. 18.

Fracţionarea intervalelor este un procedeu foarte simplu, dar foarte greoi. Există mai multe metode prin care se pot afla rapid şi cu mare precizie rădăcinile unei ecuaţii, din care vom expune două.

4.3.4. Metoda coardei. Considerăm o ecuaţie

$$f(x) = 0,$$

unde f este o funcţie derivabilă într-un interval I.

Presupunem că am stabilit printr-un mijloc oarecare că ea are o singură rădăcină în intervalul (a, b) unde $a, b \in I$ şi că $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Graficul funcţiei f va avea în intervalul (a, b) forma din figura 18, în sensul că punctul $M(a, f(a))$, se găseşte sub axa Ox, iar punctul $N(b, f(b))$ deasupra ei. Rădăcina pe care o căutăm este abscisa punctului P în care graficul taie axa Ox, abscisă pe care nu o cunoaştem.

Metoda coardei constă în faptul următor: *se ia ca valoare aproximativă a rădăcinii abscisa punctului Q în care coarda MN taie axa Ox*. Se poate spune că arcul de curbă MPN se înlocuieşte cu coarda MN.

Pentru a calcula abscisa punctului Q nu avem decît să scriem ecuaţia dreptei care trece prin punctele M şi N, şi să determinăm abscisa punctului ei de intersecţie cu axa Ox.

Ecuaţia dreptei este

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \qquad (1)$$

Punem $y = 0$ şi rămîne să aflăm x din ecuaţia

$$-f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Este, însă, mai simplu să aflăm numărul $x - a$, care este măsura algebrică a vectorului $\overrightarrow{AQ}$:

$$h = x - a = -\frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}. \qquad (2)$$

Valoarea rădăcinii va fi $x = a + h$. Numărul h, care se adună cu a pentru a obține o aproximare mai bună se numește *corectură*.

Sensul erorii se poate determina cu ajutorul graficului funcției. Intervalul (a, b) se ia destul de mic, astfel încît derivata a doua $f''(x)$ să păstreze același semn cînd x variază de la a la b, deci curba să fie în intervalul (a, b) sau tot timpul convexă, sau tot timpul concavă. Figurile 19—22 arată toate cazurile posibile. În fiecare figură, abscisa punctului P este valoarea exactă a rădăcinii, iar abscisa punctului Q este valoarea dată de metoda coardei. În cazul figurilor 19 și 21 ($f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ respectiv $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$) punctul Q este la stînga punctului P, deci metoda coardei dă o valoare aproximativă prin lipsă, în cazul figurilor 20 și 22 ($f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ respectiv $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$) se obține o valoare aproximativă prin adaos.

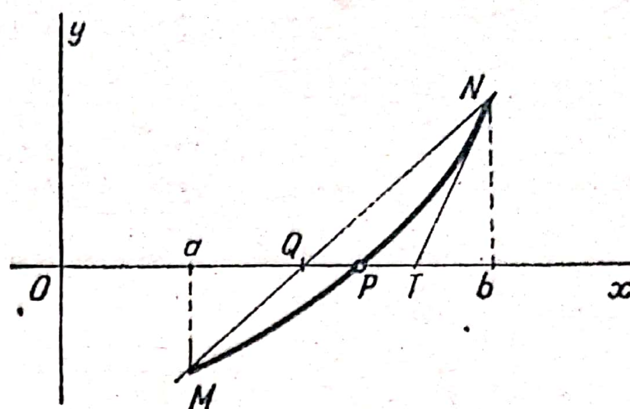


Fig. 19.

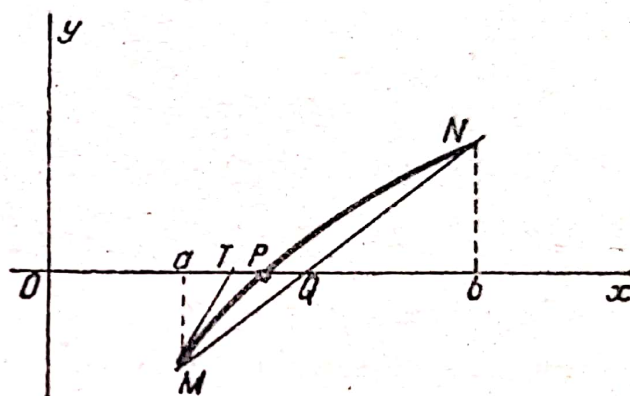


Fig. 20.

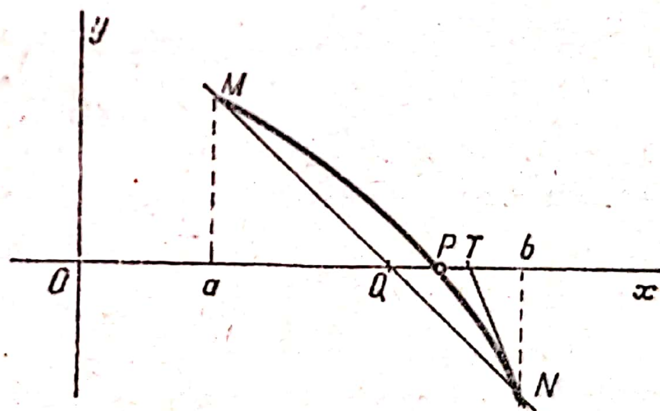


Fig. 21.

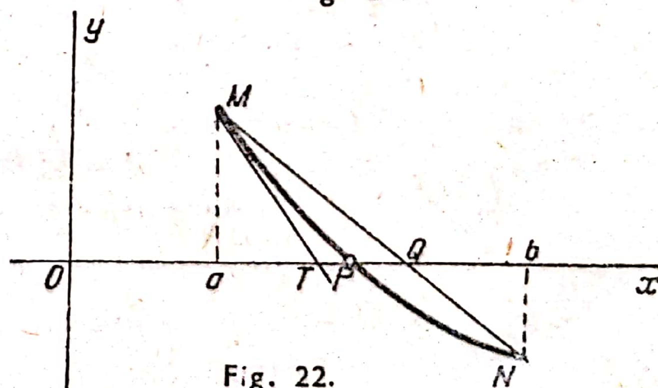


Fig. 22.

4.3.5. **Exemplu.** Reluăm ecuația (4.3.3)

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Știm că ea are o rădăcină în intervalul (2,3; 2,4). Aplicăm formula (2
Avem:

$$a = 2{,}3, \quad b = 2{,}4, \quad b - a = 0{,}1,$$
$$f(a) = f(2{,}3) = -1{,}433,$$
$$f(b) = f(2{,}4) = 0{,}024.$$

Deci,

$$h = \frac{0{,}1 \cdot (-1{,}433)}{0{,}024 - (-1{,}433)} = \frac{0{,}1433}{1{,}457} = 0{,}0983\ldots$$

O valoare aproximativă a rădăcinii este

$$x = a + h = 2{,}3 + 0{,}0983\ldots = 2{,}3983\ldots$$

Pentru a cunoaște sensul erorii, calculăm derivatele:

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x.$$

În intervalul (2,3; 2,4) ambele derivate sînt pozitive, graficul are forma din figura 19. Valoarea aflată este aproximativă prin lipsă. Nu putem evalua limita erorii.

4.3.6. **Observări.** 1) Relația (1) se mai scrie

$$y = f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

sau, dacă expresia din dreapta se ordonă în raport cu x,

$$y = f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}. \tag{1''}$$

Deci $f_1(x)$ este un polinom de gradul I (liniar). Înlocuind în (1″)x prin a și prin b, se obține

$$f_1(a) = f(a), \qquad f_1(b) = f(b)$$

adică polinomul f_1 ia în a și b aceleași valori ca funcția f. Se spune că $f_1(x)$ este un polinom de interpolare liniar, iar metoda coardei se mai numește metoda interpolării liniare. În loc de a rezolva ecuația $f(x) = 0$, se rezolvă ecuația $f_1(x) = 0$ (în practică se calculează $x - a = h$, nu x).

În cazul ecuației precedente (4.3.5), polinomul de interpolare este

$$f_1(x) = -1{,}433 + 14{,}57(x - 2{,}3).$$

Pentru aflarea rădăcinii, polinomul $f(x) = x^3 - 2x - 9$ a fost înlocuit cu acest polinom.

2) Polinomul de gradul I $f_1(x)$ se poate determina independent de consideraţiile geometrice. Fiind dată o ecuaţie oarecare $f(x) = 0$, se consideră un polinom de gradul I cu coeficienţi nedeterminaţi,

$$f_1(x) = mx + n$$

şi se pun condiţiile $f_1(x) = f(a)$, $f_1(b) = f(b)$, adică

$$ma + n = f(a), \qquad mb + n = f(b).$$

Rezolvînd acest sistem în raport cu m şi n (determinantul sistemului este $a - b \neq 0$). Se obţine pentru $f_1(x)$ expresia din (1″).

Tot prin aceeaşi metodă, a coeficienţilor nedeterminaţi, se poate construi un polinom de interpolare de gradul II, al unei funcţii date f, adică un polinom $f_2(x) = mx^2 + nx + p$ care ia în trei puncte date aceeaşi valoare ca funcţia f. În mod asemănător se defineşte polinomul de interpolare de gradul III, IV,... Aceste polinoame aproximează din ce în ce mai bine funcţia f.

3) Interpolarea care se face cînd se folosesc table, de exemplu tablele de logaritmi, este tot liniară. Acolo se procedează astfel:

Fie a şi b două numere ai căror logaritmi se găsesc în tablă, iar x un număr cuprins între a şi b, al cărui logaritm se caută. Se aplică procedeul numit „regula de trei".

$$\begin{array}{ll} b - a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \log b - \log a \\ x - a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & h \end{array}$$

$$\frac{b - a}{x - a} = \frac{\log b - \log a}{h}, \text{ de unde } h = \frac{\log b - \log a}{b - a}(x - a)$$

şi se ia

$$\log x = \log a + h = \log a + \frac{\log b - \log a}{b - a}(x - a) \qquad (1'')$$

„Judecata" este următoarea:

Dacă numărul creşte de la a la b, logaritmul creşte de la $\log a$ la $\log b$; dacă numărul creşte de la a la x, logaritmul va creşte cu un număr necunoscut h. Numărul h se află considerînd creşterile funcţiei logaritmice proporţionale cu creşterile argumentului. Aceasta revine la a înlocui $\log x$ prin polinomul din (1′). În adevăr, în cazul cînd $f(x) = \log x$, relaţia (1′) devine (1″).

4.3.7. Metoda tangentei. Fie

$$f(x) = 0$$

o ecuaţie care admite o singură rădăcină în intervalul (a, b). Presupunem că funcţia f este derivabilă în intervalul $[a, b]$. Ducem în punc-

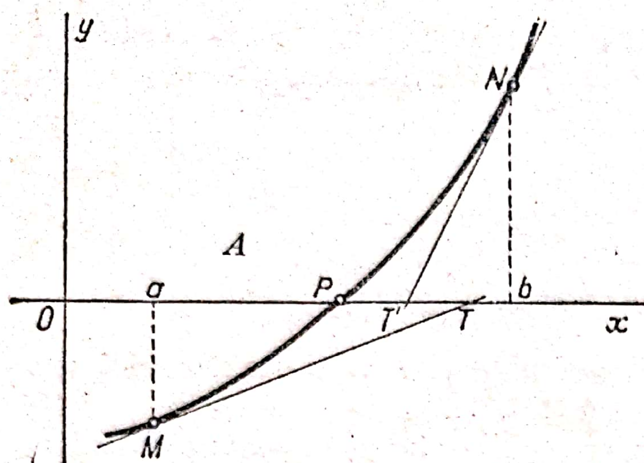


Fig. 23.

tul M (fig. 23) tangenta la curba $y = f(x)$. Punctul T în care tangenta taie axa Ox ne dă o valoare aproximativă a rădăcinii.

Pentru a calcula abscisa punctului T, scriem ecuația tangentei la curbă în punctul $M\,(a, f(a))$. Coeficientul ei unghiular este $f'(a)$, deci ecuația este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Punem aici $y = 0$ și obținem

$$\boxed{h = x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}}\,.$$

Numărul $h = x - a$ este măsura algebrică a vectorului $\overrightarrow{AT}$, el reprezintă corectura care trebuie adăugată la a pentru a obține o valoare aproximativă a rădăcinii.

Se poate duce tangenta în punctul $N(b, f(b))$. Ecuația ei este

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Pentru $y = 0$ ea ne dă corectura

$$k = x - b = -\frac{f(b)}{f'(b)}$$

care trebuie adunată cu b pentru a obține abscisa punctului T'. Valoarea astfel obținută este de asemenea o valoare aproximativă a rădăcinii. Pentru a ști care din cele două tangente dă un rezultat mai bun, se poate folosi graficul funcției: se duc tangentele în M și N la grafic și se alege tangenta care taie axa Ox într-un punct mai apropiat de P.

Ca și la metoda coardei, sensul erorii este dat de forma curbei (v. fig. 19—22). În cazul figurii 23, ambele valori sînt aproximative prin adaos.

Această metodă se numește și *metoda lui Newton*.

4.3.8. **Exemplu.** Reluăm ecuația

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0$$

care are o singură rădăcină în intervalul (2,3; 2,4). Avem:

$$a = 2{,}3 \quad f(a) = -1{,}433, \quad f'(x) = 3x^2 - 2, \; f'(2{,}3) = 13{,}87,$$

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{-1{,}433}{13{,}87} = 0{,}103\ldots$$

deci

$$x_1 = 2{,}3 + 0{,}103 = 2{,}403.$$

Pentru tangenta în punctul N, avem:

$$b = 2{,}4, \; f(b) = 0{,}024, \; f'(b) = 15{,}28,$$

$$k = -\frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{-0{,}024}{15{,}28} = -0{,}0015\ldots$$

deci

$$x_2 = 2{,}4 - 0{,}0015 = 2{,}3985.$$

Această valoare este mai bună.

4.3.9. **Folosirea simultană a ambelor metode.** Figurile 19—22 arată că punctele Q și T se găsesc de o parte și de alta a punctului P. Aceasta înseamnă că dacă una dintre cele două metode dă o valoare aproximativă a rădăcinii prin lipsă, cealaltă dă o valoare aproximativă prin adaos. Acest fapt ne permite să ne dăm seama de precizia rezultatului.

Astfel, în cazul ecuației din exemplul tratat aici, metoda coardei și metoda tangentei au dat rezultatele

$$x = 2{,}3983\ldots \text{ și } x = 2{,}3985,$$

primul prin lipsă, iar al doilea prin adaos. Deci, rădăcina se găsește între aceste două numere. Rezultatul este

$$x = 2{,}3984 \; (\pm 0{,}0001)$$

Subliniem că aproximările date de metoda coardei și metoda lui Newton sînt de sens contrar numai cîtă vreme derivata a doua își păstrează semnul în intervalul (a, b). Situația nu mai este aceeași dacă curba are un punct de inflexiune în intervalul (a, b). Astfel, în cazul

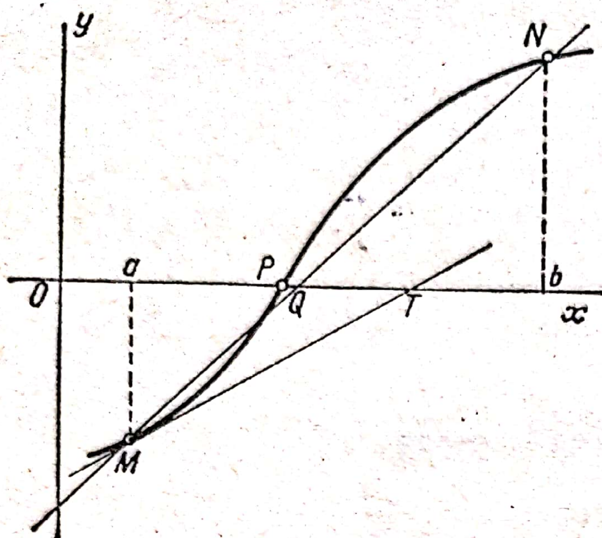


Fig. 24.

figurii 24 punctele Q şi T sînt de aceeaşi parte a punctului P. Ambele metode dau valori aproximative prin adaos.

4.3.10. Aplicarea repetată a celor două metode. Cele două valori aproximative, una prin lipsă şi cealaltă prin adaos, ne arată că rădăcina se află într-un interval mai mic (a', b'). Putem aplica din nou cele două metode şi să găsim un nou interval (a'', b'') ş.a.m.d. Procedeul se poate repeta de cîte ori vrem, obţinîndu-se o precizie din ce în ce mai mare.

Vom face acest lucru în cazul ecuaţiei

$$f(x) = x^3 - 2x - 9 = 0.$$

Am aflat că rădăcina ei este cuprinsă între 2,3983 şi 2,3985. Zecimala a patra se determină printr-un singur sondaj, calculînd valoarea polinomului pentru $x = 2{,}3984$. Se obţine

$$f(2{,}3984) = -0{,}000429572096 < 0,$$

deci rădăcina se găseşte în intervalul (2,3984; 2,3985).

Aplicăm metoda coardei.

$$a = 2{,}3984, \qquad f(a) = -0{,}000429572096,$$
$$b = 2{,}3985, \qquad f(b) = 0{,}001096196625,$$

corectura este

$$h = -\frac{0{,}0001\cdot(-0{,}000429572096)}{0{,}001525768721} = 0{,}00002815446\ldots,$$

deci

$$x_c = 2{,}39842815446 \text{ (prin lipsă)},$$

Aplicăm metoda tangentei, şi anume luăm tangenta în punctul de abscisă $b = 2{,}3985$, căci s-a văzut (4.3.10) că dă un rezultat mai bun.

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f'(b) = 15{,}25840675.$$

Corectura este

$$k = -\frac{0{,}001096196625}{15{,}25840675} = -0{,}0000718421\ldots,$$

deci

$$x_t = 3{,}3985 - 0{,}0000718421 = 2{,}3984281579 \text{ (prin adaos).}$$

Cele două rezultate au 8 zecimale comune. Rotunjindu-le la 9 cifre, cifra a 9-a din x_c și x_t este, respectiv 5 și 8, deci luînd media, $x = 2{,}398428157\left(\pm\frac{2}{10^9}\right)$.

EXERCIȚII

SEPARAREA RĂDĂCINILOR

1. Se consideră ecuația

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$$

în care m este variabil. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor care se obțin dînd lui m pe rînd, valorile următoare

a) $m = 8$; b) $m = -6$; c) $m = 30$; d) $m = 27$.

2. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $x^3 - 4x^2 + 7x - 12 = 0$; b) $3x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 15 = 0$;
c) $x^5 - 5x^3 - 50x + 120 = 0$; d) $x^5 - 5x^3 - 50x + 10 = 0$;
e) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 20 = 0$;
f) $3x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 255x^2 - 360x + 160 = 0$;
g) $3x^4 + 8x^3 - 78x^2 + 120x - 53 = 0$;
h) $2x^3 - 63x^2 - 774x - 120 = 0$.

3. Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:

a) $\sqrt{x^2 - 2x} = 9 - x^2$; b) $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{x}{2} + 1$; c) $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4} = 3 - x^2$;
d) $|x^4 - 1| = x + 2$.

4. Să se separe prin metoda grafică rădăcinile ecuațiilor următoare:

a) $2^x = 3x^2$; b) $2^x = x^3$; c) $e^x = \cos x$; d) $\sin x = x^2$; e) $\sin x - x + 1 = 0$;
f) $\log x + x = 0$; g) $\log x = \sin x$; h) $\operatorname{tg} x + x - 1 = 0$.

5. Să se separe soluţiile reale ale sistemelor:

a) $x^2y + y = 2, \quad x + y = 1$;
b) $x^2y + y - x = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$;
c) $x + y + z = 0, \quad xy + yz + zx = -12, \quad xyz = -7$.

6. Să se discute în raport cu parametrul a rădăcinile reale ale ecuaţiilor următoare*:

a) $x^3 - 6x^2 - 15x + a = 0$; b) $x^4 - 2x^2 + a = 0$; c) $x - \sqrt{x} + a = 0$.

7. Să se discute în raport cu parametrul a rădăcinile reale ale ecuaţiilor următoare:

a) $ax^2 + (a - 3)(x + 1) = 0$; b) $ax^3 - x - a = 0$;
c) $x^3 - ax + 1 = 0$; d) $ax^3 - 3(a + 1)x + 2(a + 1) = 0$.

8. Să se discute în raport cu parametrul m rădăcinile reale ale ecuaţiilor următoare:

a) $e^x = x + m$; b) $\ln x = x + m$; c) $\sin x = x + m$; d) $\sin x = 2x + m$;
e) $3^x = mx^2$; f) $\operatorname{tg} x = mx$; g) $\ln x = mx$; h) $\operatorname{arctg} x = mx$; i) $\arcsin x = x + m$.

9. Se dă ecuaţia

$$(a - 1)x^2 - 2(3a - 1)x + 8a - 1 = 0.$$

Să se discute în raport cu parametrul a numărul rădăcinilor sale reale situate în intervalul:

a) $[-1, 1]$; b) $[0, 2]$; c) $[3, 5]$.

10. Aceeaşi problemă în cazul ecuaţiei

$$\sin x + \cos x = a,$$

intervalele fiind:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; b) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$; d) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

11. Aceeaşi problemă în cazul ecuaţiei

$$5x^3 - a(5x^2 - 2x - 3) = 0,$$

intervalele fiind

a) $(-\infty, 0]$; b) $[-1, 1]$; c) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

12. Să se discute cu ajutorul şirului lui Rolle rădăcinile reale ale ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$ $(p, q \in R)$.

13. a) Să se înscrie într-o sferă cu raza de R cm un con al cărui volum să fie de πV cm³. Discuţie în raport cu V.

---

* La problemele care conţin parametri se va folosi de preferinţă metoda grafică.

b) Aceeaşi problemă dacă se pune condiţia ca centrul sferei să fie în interiorul conului.

c) Să se rezolve efectiv ecuaţia în cazul $V = \frac{25\ R^3}{64}$. *

14. a) Să se înscrie într-un cerc cu raza de R cm un triunghi isoscel a cărui arie să fie de S cm². Discuţie.

b) Să se rezolve efectiv ecuaţia problemei în cazul $S = R^2$.

15. Într-o elipsă $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ se duce o coardă MM' paralelă la axa Ox şi capetele ei, M şi M' se unesc cu punctul $B(0, b)$. Să se determine poziţia acestei corzi astfel încît aria triunghiului BMM' să fie egală cu un număr dat S. Discuţie. Ce legătură există între această problemă şi cea precedentă.

16. a) Să se înscrie într-un con cu raza de R cm şi înălţimea de h cm un cilindru al cărui volum să fie de πV cm³. Discuţie.

b) Să se rezolve efectiv ecuaţia în cazul $V = \frac{2R^2h}{27}$.

17. a) Generatoarea unui con circular drept este de a cm, volumul său este de πV cm³. Să se afle raza şi înălţimea conului. Discuţie.

b) Caz particular: $V = \frac{a^3}{8}$.

18. Aria laterală a unui cort conic este de πS m², volumul său este de πV m³. Să se determine raza şi generatoarea conului. Discuţie.

19. a) Să se determine dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic cu baza pătrată ştiind că aria sa totală este de S cm², iar volumul de V cm³. Discuţie.

b) Să se rezolve problema pînă la capăt în cazul cînd $S = \frac{17\sqrt[3]{V^2}}{2}$.

20. a) Aria totală şi volumul unui cilindru circular drept sînt, respectiv, de πS cm² şi πV cm³. Să se afle raza şi înălţimea cilindrului. Discuţie.

b) Să se rezolve problema pînă la capăt în cazul cînd $V = \frac{7S\sqrt{S}}{54}$.

APROXIMAREA RĂDĂCINILOR

21. Să se separe rădăcinile ecuaţiilor următoare şi să se calculeze cea care se află în intervalul indicat. Prima zecimală se va determina prin fracţionarea intervalelor, apoi se vor aplica metoda coardei şi metoda tangentei.

a) $x^3 - 5x - 3 = 0$, $(2; 3)$; b) $x^3 - 2x - 5 = 0$**, $(2, 3)$;
c) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, $(0, 1)$.

* Problemele 13—20 se consideră rezolvate dacă se formează ecuaţia şi se separă rădăcinile ei reale.

** Exemplu tratat de Newton însuşi.

22. Să se rezolve ecuaţiile următoare. Rădăcinile se vor separa prin metoda grafică, apoi se va proceda prin fracţionarea intervalelor (4.3.2), pînă cînd se va obţine un interval a cărui lungime este mai mică decît 1 (la primele două exerciţii) sau decît 0,1 (la ultimele două).

a) $\lg x = \sin x$; b) $x = \cos x$; c) $x^x = 3$; d) $3^x = x + 2$.

23. Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Volumul corpului născut prin rotirea dreptunghiului în jurul unei laturi este de 10π cm^3. Se cer laturile dreptunghiului.

24. Într-un triunghi dreptunghic, diferenţa dintre ipotenuză şi o catetă este de 5 m, aria triunghiului este de 4 cm^2. Se cere o catetă a triunghiului.

25. (*Problema lui Arhimede*). Să se taie o sferă cu un plan astfel încît volumul părţii din sferă situată de o parte a planului să fie a n-a parte din volumul sferei. Cazuri particulare: a) $n = 3$ (împărţirea unei sfere în trei părţi echivalente); $n = 4$ (împărţirea unei emisfere în două părţi echivalente).

26. Pînă la ce adîncime se scufundă în apă o sferă făcută dintr-un material cu densitatea $\rho = 0,7$.

27. Să se ducă într-un semicerc printr-un capăt al diametrului o coardă care să împartă semicercul în două părţi echivalente (de aceeaşi arie).

28. Să se ducă într-un semicerc o coardă paralelă cu diametrul care să împartă semicercul în două părţi echivalente (de aceeaşi arie).

29. Să se ducă într-un cerc o coardă AB astfel încît lungimea arcului AB să fie dublul distanţei de la centrul cercului la coardă.

30. Să se ducă într-un cerc o coardă AB astfel încît lungimea arcului AB să fie dublul lungimii corzii AB.

31. Se consideră un cerc cu diametrul AB şi tangenta în punctul B. Prin punctul A se duce o semidreaptă şi se notează cu C şi D respectiv punctele ei de intersecţie cu semicercul şi cu tangenta în B. Să se determine unghiul $CAB = x$ astfel încît lungimea segmentului BD să fie dublul lungimii arcului BC.

32. Se consideră un triunghi dreptunghic OAB ($\widehat{A} = 90°$). Se duce un arc de cerc cu centrul în O şi cu raza OA, şi se notează cu C punctul lui de intersecţie cu OB. Să se determine unghiul O astfel încît aria sectorului OAC să fie jumătate din aria triunghiului OAB.

CAPITOLUL V

STRUCTURI ALGEBRICE

5.1. LEGI DE COMPOZIŢIE INTERNE

5.1.1. **Introducere.** Matematica, din cele mai vechi timpuri, s-a dezvoltat în strînsă legătură cu ideea de calcul. Documentele cele mai vechi, rămase de la egipteni şi babilonieni, dovedesc că aceştia erau în posesia unui sistem complet de reguli de calcul privind numerele întregi pozitive, numerele raţionale pozitive, lungimile, ariile, volumele, ecuaţiile de gradul întîi şi doi. Aceste reguli, date fără nici o justificare, erau enunţate în cazuri particulare, numerice, dar nu lăsau nici o îndoială asupra generalităţii lor. În această etapă regulile de calcul aveau menirea de a oferi un mijloc de a afla rezultatul unui calcul, în care intervin operaţiile aritmetice uzuale cu numere date efectiv. Primele enunţuri cu caracter general şi încercări de justificare ale regulilor de calcul se întîlnesc la greci (Euclid, Diophante). Apariţia algebrei, caracterizată prin introducerea notaţiei cu litere a elementelor care intervin în probleme, a permis enunţarea unor reguli generale de calcul (referitoare la numere pozitive şi negative, precum şi la unele mărimi numerice — lungimi, arii, volume). În această nouă etapă se fac tot calcule cu numere, dar operaţiile aritmetice uzuale se aplică şi unor numere neprecizate efectiv, notate cu litere.

Perfecţionarea continuă a notaţiilor matematice (notaţiile folosite azi le datorăm aproape în întregime matematicienilor Viète, sec. XVI şi Descartes, sec. XVII), precum şi apariţia unor noţiuni noi de natură

foarte variată (polinoame, vectori, permutări, matrici etc.), cu care se calculează după reguli analoge regulilor de la numere, au determinat pe matematicieni să reflecteze asupra principiilor generale care stau la baza calculului, indiferent că acesta se face cu numere sau cu alte elemente. Apare necesitatea de a se face un studiu al operaţiilor în general, fără a se ţine seama de natura obiectelor cu care se operează, astfel încît rezultatele obţinute să fie aplicabile şi în cazul operaţiilor uzuale cunoscute în mulţimi concrete.

În rezumat, evoluţia noţiunii de operaţie, a trecut prin următoarele faze:

1) operaţii determinate cu elemente determinate (numere) — obiectul aritmeticii;

2) operaţii determinate cu elemente determinate şi nedeterminate (numere) — obiectul algebrei elementare;

3) operaţii nedeterminate cu elemente nedeterminate — obiect al algebrei abstracte.

În acest manual vom face un studiu al operaţiilor în general, subliniind acele proprietăţi care permit pe de-o parte să justificăm dintr-un punct de vedere unitar unele reguli ale algebrei elementare, iar pe de altă parte să aplicăm aceste reguli, sau numai o parte dintre ele, şi în cazul unor mulţimi ale căror elemente nu sînt numere.

5.1.2. Pentru a face un calcul, cu notaţiile şi convenţiile folosite în zilele noastre, se operează succesiv cu două elemente scrise alăturat în textul respectiv şi considerate de la „stînga la dreapta", ordinea în care se calculează fiind indicată de paranteze. Parantezele se pun astfel încît, la fiecare etapă a calculului, să se opereze cu două elemente scrise alăturat. Sînt cazuri cînd pe baza unor convenţii parantezele se omit.

Să ne referim acum la operaţiile aritmetice cu numere naturale.

Adunarea, în mulţimea N a numerelor naturale, asociază, în mod unic, oricărui cuplu (x, y) de numere naturale, numărul natural $x + y$.

Mulţimea cuplelor (x, y), unde $x \in N$, $y \in N$ este produsul cartezian $N \times N$. Corespondenţa $(x, y) \to x + y$ determină o funcţie definită pe $N \times N$ cu valori în N. *Aşadar, adunarea în N este o funcţie definită pe mulţimea $N \times N$ cu valori în N.*

Î n m u l ț i r e a, în mulțimea N asociază (în mod unic) oricărui cuplu (x, y) de numere naturale, numărul natural $x \cdot y$.

Înmulțirea în N este o funcție definită pe produsul cartezian $N \times N$ cu valori în N.

S c ă d e r e a, în mulțimea N a numerelor naturale, asociază (în mod unic) numai la anumite cuple (x, y) de numere naturale (cele în care $x > y$), un număr natural, notat $x - y$.

Mulțimea cuplelor (x, y) de numere naturale, în care $x > y$ constituie o parte a produsului cartezian $N \times N$.

Corespondența $(x, y) \to x - y$ determină o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.

Așadar, scăderea în N este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.

Î m p ă r ț i r e a în N asociază numai la anumite cuple (x, y) de numere naturale (cele în care x este multiplu de y) un număr natural notat $x : y$.

Mulțimea cuplelor (x, y), unde $x \in N$, $y \in N$ și x este multiplu de y este o parte a produsului cartezian $N \times N$. *Așadar, împărțirea în mulțimea N a numerelor naturale este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N.*

La toate operațiile, în mulțimea N, cercetate mai înainte s-a observat o caracteristică comună: existența unei reguli pe baza căreia la orice cuplu sau la anumite cuple de numere din mulțimea considerată (mulțimea numerelor naturale) se poate asocia în mod unic un număr din aceeași mulțime. Cum $N \times N \subset N \times N$ ($N \times N$ este o parte a mulțimii $N \times N$), putem spune că *oricare dintre operațiile aritmetice studiate este o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $N \times N$ cu valori în N*. Mulțimea N n-a jucat un rol esențial în considerațiile anterioare. Dacă în loc de mulțimea N se consideră mulțimea Z a numerelor întregi, sau mulțimea Q a numerelor raționale, sau mulțimea R a numerelor reale, sau mulțimea C a numerelor complexe, oricare dintre cele patru operații aritmetice va fi considerată în mulțimea respectivă, ca o funcție definită pe o parte a produsului cartezian $Z \times Z$, respectiv $Q \times Q$, $R \times R$, $C \times C$ cu valori în Z, respectiv Q, R, C.

Reținînd ce a fost esențial în operațiile aritmetice studiate mai înainte sîntem conduși, în mod natural, la o noțiune cu caracter general, aplicabilă și în mulțimi care nu sînt formate din numere, noțiunea de *lege de compoziție internă*, prin care se extinde noțiunea de operație aritmetică.



DEFINIȚIE. Se numește lege de compoziție internă între elementele unei mulțimi M, o aplicație f definită pe o parte a produsului cartezian $M \times M$ cu valori în M.

În loc de lege de compoziție internă se mai spune *operație algebrică internă*. O lege de compoziție între elementele unei mulțimi M se mai spune că este definită pe M.

Elementul corespunzător unui cuplu (x, y) prin funcția f se numește *compusul* lui x cu y și se notează scriind succesiv, x, un semn numit semnul legii de compoziție și y (semnul dintre x și y este același pentru toți compușii pentru o lege de compoziție dată). Compusul lui x cu y poate fi notat în diverse moduri, ca de exemplu: $x \top y$, $x \perp y$, $y * x$, $x \circ x$, $x \Delta y$.

Se poate întîmpla ca o lege de compoziție să prezinte unele analogii cu adunarea numerică și atunci se folosește pentru notarea compusului lui x cu y, tot semnul $x + y$. Elementul $x + y$ se va numi *suma* lui x cu y, iar elementele x și y se vor numi *termenii* sumei. Se spune în acest caz că legea de compoziție este notată *aditiv*. O lege de compoziție notată aditiv se va numi tot *adunare*.

Dacă legea de compoziție prezintă unele analogii cu înmulțirea numerică, atunci compusul dintre x și y se notează uneori cu $x \cdot y$ sau xy și se numește produsul lui x cu y, elementele x și y numindu-se *factorii* produsului. În acest caz se spune că legea de compoziție este notată *multiplicativ*. O lege de compoziție notată multiplicativ se va numi *înmulțire*.

Se spune lege de compoziție „internă", deoarece compusul a două elemente dintr-o mulțime dată este un element din aceeași mulțime. Algebra studiază în afară de legile de compoziție interne, și legi de compoziție externe, prin care se compun elementele unei mulțimi de bază cu elemente dintr-o mulțime auxiliară, obținîndu-se un element tot din mulțimea de bază (exemplu: înmulțirea vecto-

rilor cu numere reale este o lege de compoziţie externă prin care la orice cuplu $(\alpha, \vec{v})$ format din numărul real α şi vectorul $\vec{v}$ îi corespunde vectorul $\overrightarrow{\alpha v}$).

Dacă legea de compoziţie considerată într-o mulţime M face să corespundă la orice cuplu (x, y) din mulţimea respectivă un element din aceeaşi mulţime (funcţia corespunzătoare este definită pe produsul cartezian $M \times M$), se spune că legea de compoziţie *este peste tot definită. O lege de compoziţie internă peste tot definită asociază la orice cuplu de elemente din M, un element şi numai unul din M*. În cazul cînd există cel puţin un cuplu (x, y) de elemente din mulţimea considerată căruia nu-i corespunde, prin legea de compoziţie dată, nici un element (din aceeaşi mulţime), legea de compoziţie *nu este peste tot definită*. (În acest caz se presupune, evident, că este definit cel puţin un compus.)

Cele mai frecvente legi de compoziţie studiate în acest manual vor fi legile de compoziţie peste tot definite. Vom întîlni des cazuri cînd legea de compoziţie este astfel dată, încît nu este evident că ea este peste tot definită. În aceste cazuri, *pentru a demonstra că legea este peste tot definită, trebuie să verificăm că oricare ar fi x şi y din mulţimea considerată, compusul lui x cu y este un element din aceeaşi mulţime.*

Exemple:

5.1.3. *Operaţiile aritmetice*, considerate pe diverse mulţimi de numere, sînt legi de compoziţie interne.

5.1.4. *O lege de compoziţie definită pe mulţimea* $\{a, b, c\}$.

În unele cazuri vom defini legile de compoziţie cu ajutorul unui tabel format din linii şi coloane. De exemplu, în tabelul (1), este dată o lege de compoziţie definită pe mulţimea $\{a, b, c\}$, şi notată cu semnul $\top$ (semnul legii de compoziţie se trece în colţul din stînga)

$\top$	a	b	c
a	a	b	a
b	c	a	b
c	b	b	b

Tabelul 1

Compusul unui element cu un alt element se citeşte la intersecţia dintre linia primului element şi coloana celui de-al doilea element-

Avem, de exemplu $a \top b = b$, $b \top a = c$, $a \top (b \top c) = a \top b = b$.

5.1.5. **Reuniunea, intersecția.** Fie $E = \{1, 2\}$. Mulțimea $\mathfrak{P}(E)$ a părților lui E are ca elemente mulțimile:

$$\varnothing \text{ (mulțimea vidă)},$$
$$A = \{1\}; \ B = \{2\},$$
$$E = \{1, 2\}.$$

Așadar, $\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = \{\varnothing, A, B, E\}$.

În mulțimea $\mathfrak{P}(E)$, asociind oricărui cuplu (X, Y) de părți a lui E mulțimea $X \cup Y$ (tabelul 2), respectiv $X \cap Y$ (tabelul 3) definim două legi de compoziție peste tot definite.

$\cup$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	A	E	E
B	B	E	B	E
E	E	E	E	E

Tabelul 2

$\cap$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A
B	$\varnothing$	$\varnothing$	B	B
E	$\varnothing$	A	B	E

Tabelul 3

Procedînd analog, putem înzestra mulțimea $\mathfrak{P}(E)$ a părților oricărei mulțimi E, cu două legi de compoziție peste tot definite, reuniunea, respectiv intersecția.

5.1.6. **Compunerea funcțiilcr.** Fie E o mulțime și funcțiile $f : E \to E$ și $g : E \to E$. Asociind cuplurilor (g, f), funcția $g \circ f : E \to E$ definim o lege de compoziție peste tot definită în mulțimea funcțiilor definite pe E cu valori în E. Reamintim că funcția $g \circ f$ realizează corespondența $x \to g\,(f(x))$, adică $(g \circ f)\ (x) = g\ (f(x))$ și că aceste funcții se reprezintă în diagrame ca cele din figurile 25 și 26 (săgețile punctate indică corespondența realizată de $g \circ f$).

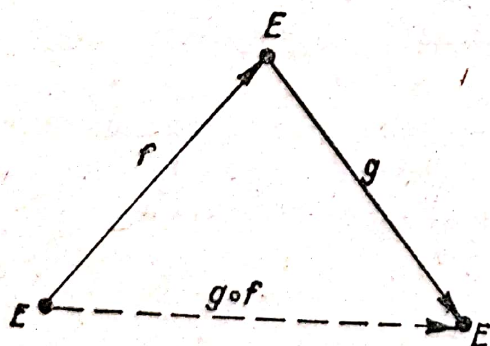


Fig. 25.

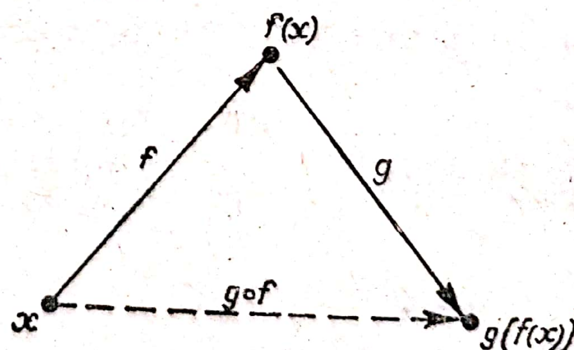


Fig. 26.

În diagrama corespunzătoare compunerii $g \circ f$ se desenează întîi f și apoi g.

De exemplu, în mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R să considerăm funcțiile:

$$f(x) = 3x + 2 \qquad (f : x \to 3x + 2)^*,$$

$$g(x) = x^2 + 5x \qquad (g : x \to x^2 + 5x).$$

Avem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3(x^2 + 5x) + 2 =$$

$$= 3x^2 + 15x + 2.$$

$$f \circ g : x \to 3x^2 + 15x + 2.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 5f(x) = (3x + 2)^2 +$$

$$+ 5(3x + 2) = 9x^2 + 27x + 14.$$

$$g \circ f : x \to 9x^2 + 27x + 14.$$

Se observă că: $f \circ g \neq g \circ f$.

5.1.7. **Compunerea permutărilor.** Reamintim că *se numește permutare asupra mulțimii* $E = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ *orice aplicație biunivocă* $\Pi : E \to E$ (*o aplicație cu proprietatea*: $i \neq j \Rightarrow \Pi(i) \neq \Pi(j)$).

O permutare asupra lui E care realizează corespondența $1 \to e_1$, $2 \to e_2, \ldots n \to e_n$ se notează prin semnul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{pmatrix}.$$

Numerele $e_1, e_2, \ldots e_n$ sînt numerele $1, 2, \ldots, n$, luate o singură dată, eventual în altă ordine decît ordinea naturală. Întrucît în determinarea unei permutări nu interesează decît corespondența realizată de aceasta, putem scrie elementele din linia întîi în orice ordine, avînd însă grijă ca în linia a doua, să scriem imaginile corespunzătoare elementelor scrise deasupra.

---

* Prin notația $f : x \to 3x + 2$ se exprimă faptul că funcția f face să corespundă elementului x, elementul $3x + 2$.

De pildă, pentru permutarea asupra mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ care realizează corespondenţa $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $4 \to 4$, putem folosi notaţiile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Scopul acestui paragraf nu este de a studia în amănunţime compunerea permutărilor (această chestiune va fi reluată), ci de a da tehnica de compunere a două permutări asupra unei mulţimi. Pentru simplitatea expunerii vom considera permutările particulare

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ asupra mulţimii } \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ne propunem să determinăm permutarea $\Pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ$ $\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Avem, de exemplu, $(\Pi \circ \sigma)(4) = \Pi(\sigma(4)) = \Pi(3) =$ $= 2$. Deci pentru a afla imaginea elementului 4 prin $\Pi \circ \sigma$, aflăm întîi imaginea $\sigma(4)$ a lui 4, prin σ, imagine care este 3, apoi imaginea lui $\sigma(4) = 3$, prin Π, imagine care este 2.

Avem:

$$\Pi \circ \sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\Pi} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se citeşte astfel:

1) lui 1 îi corespunde, prin σ, 2, lui 2 îi corespunde, prin Π, 1, deci lui 1 îi corespunde, prin $\Pi \circ \sigma$, 1.

2) lui 2 îi corespunde prin σ, 1, lui 1 îi corespunde, prin Π, 3, deci lui 2 îi corespunde, prin $\Pi \circ \sigma$, 3 etc.

5.1.8. **Adunarea vectorilor de poziţie.** Mulţimea vectorilor situaţi într-un plan P care au aceeaşi origine O se numesc *vectori de poziţie*. În această mulţime adunarea (care se face după regula paralelogramului — figura 27) este o lege de compoziţie peste tot definită (suma a doi vectori de poziţie este un vector de poziţie). Suma dintre vec-

torul $\vec{v}_1$ și vectorul $\vec{v}_2$ se notează cu $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

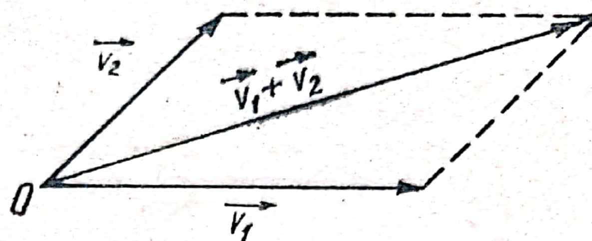


Fig. 27.

Ne-am referit numai la adunarea vectorilor care au aceeași origine. În cazul cînd vectorii nu au aceeași origine, adunarea se poate reduce la adunarea a doi vectori cu aceeași origine, considerîndu-se vectori echipolenți, cu originea comună.

5.1.9. **Transformări punctuale. Compunerea translațiilor și rotațiilor.** În acest paragraf vom înțelege prin transformare punctuală a planului P, o aplicație $f : P \to P$ (o transformare punctuală a planului P este o funcție care face ca oricărui punct din planul P să-i corespundă un punct și numai unul din același plan).

Compunerea a două transformări punctuale ale planului P este tot o transformare punctuală a planului P.

Aplicația identică a mulțimii P (funcția care face ca oricărui punct M din plan să-i corespundă tot M) este o transformare punctuală a planului P.

Se numește translație de vector $\vec{v}$ *o aplicație* $t_{\vec{v}} : P \to P$ *care face ca oricărui punct* M *(respectiv* N*) să-i corespundă un punct* M' *(respectiv* N'*), astfel încît vectorul* $\overrightarrow{MM'}$ *(respectiv* $\overrightarrow{NN'}$*) să fie echipolent cu* $\vec{v}$ (fig. 28).

Aplicația identică a planului P este translația de vector nul ($t_{\vec{0}}$).

Compunerea a două translații $t_{\vec{v}_1}$ și $t_{\vec{v}_2}$ este tot o translație. Vom justifica această afirmație urmărind diagrama din figura 29 (pentru compunerea $t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2}$ se desenează întîi $t_{\vec{v}_2}$ și apoi $t_{\vec{v}_1}$. Se observă că: $t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2 + \vec{v}_1} = t_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}$.

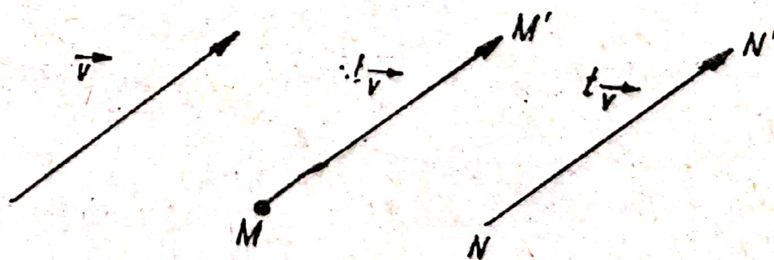
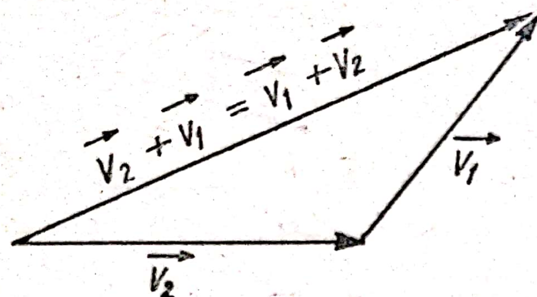


Fig. 28.



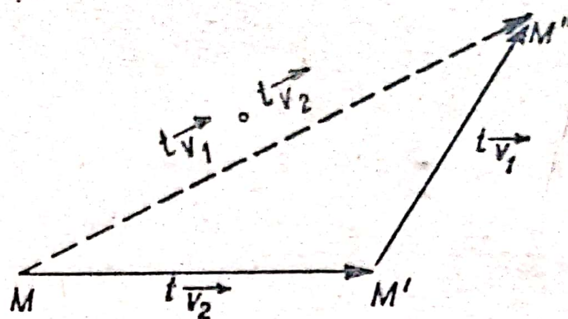


Fig. 29.

Așadar, în mulțimea T a translațiilor planului P, compunerea este o lege de compoziție peste tot definită.

R o t a ț i a. *Se numește rotație de centru O și unghi* α *(unghiul* α *considerat orientat) o transformare punctuală care face ca punctului O să-i corespundă tot O și oricărui punct M (respectiv N) să-i corespundă un punct M' (respectiv N') astfel încît* $OM = OM'$ *(respectiv* $ON = ON'$*) și* $\widehat{MOM'} = \alpha$ *(respectiv,* $\widehat{NON'} = \alpha$) (fig. 30).

Punctul O se numește *centrul de rotație*, iar unghiul α se numește *unghi de rotație.*

Rotația al cărui unghi de rotație este 0 este transformarea identică a planului.

Se observă că o modificare a unghiului prin adăugirea sau scăderea unui multiplu de 2π, nu schimbă rotația în sensul că corespondența rămîne aceeași (fig. 31).

Notăm rotația de unghi α cu $R(\alpha)$.

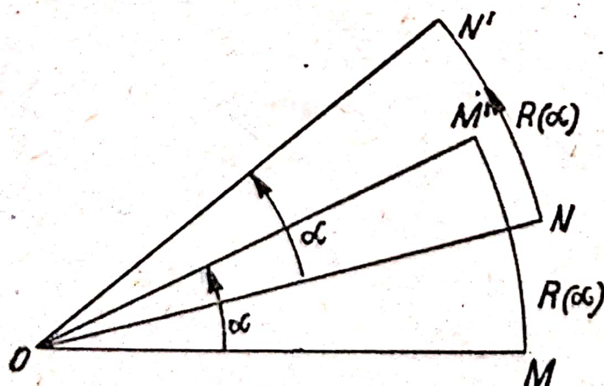


Fig. 30.

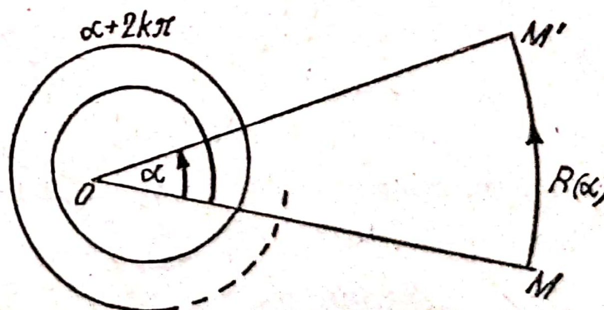


Fig. 31.

Avem: $R(\alpha) = R(\alpha + 2k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

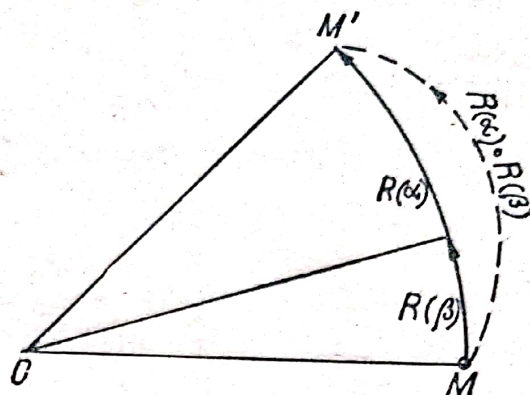


Fig. 32.

De exemplu:

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = R\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) \text{ sau}$$

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right) = R\left(\frac{13\pi}{6}\right)$$ (În grade, $R(30°) = R(390°)$.)

Compunerea a două rotații (de același centru O) este tot o rotație de centru O (fig. 32).

Se observă că $R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta)$.

De exemplu, $R(120°) \circ R(270°) = R(120° + 270°) = R(390°) = R(30°)$, $(30° = 390° - 360°)$.

5.1.10. Adunarea și înmulțirea matricelor. Modul cum se face adunarea și înmulțirea matricelor îl presupunem cunoscut din clasa a XI. În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n adunarea este o lege de compoziție peste tot definită, căci suma a două matrice pătrate de ordinul n este o matrice pătrată de ordinul n (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi, avem, de exemplu:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 3 \end{Vmatrix}.$$

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n înmulțirea este o lege de compoziție peste tot definită, căci produsul a două matrice pătrate de ordinul n este o matrice pătrată de ordinul n (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul doi, avem, de exemplu:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 & 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 36 & 41 \\ 64 & 73 \end{Vmatrix}$$

5.1.11. Adunarea și înmulțirea polinoamelor. În mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-o mulțime de numere reale sau complexe,

adunarea și înmulțirea sînt legi de compoziție interne. Vom reveni cu mai multă precizie, asupra polinoamelor, în cadrul paragrafului *Inele de polinoame.*

5.1.12. **Clase de resturi.** *Împărțirea cu rest în mulțimea numerelor întregi.* În cazul numerelor întregi este adevărată următoarea proprietate:

Fiind date două numere întregi a și $b \neq 0$, există un singur număr întreg q și un singur număr întreg $r \geqslant 0$, astfel încît

$$\text{a)} \quad a = b \cdot q + r \quad \text{și} \quad \text{(b)} \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

Numărul întreg a se numește *deîmpărțit*, numărul întreg $b \neq 0$ se numește *împărțitor*, numărul întreg q se numește *cîtul* împărțirii lui a la b, iar r se numește *restul* împărțirii lui a la b.

Exemple. a) Cîtul împărțirii numărului -17 la 5 este -4, iar restul 3, căci $-17 = 5 \cdot (-4) + 3$ și $0 < 3 < 5$. b) Cîtul împărțirii numărului -23 la -5 este 5, iar restul 2, căci $-23 = (-5) \cdot 5 + 2$ și $2 < |-5|$.

Observare. Dacă $b = 0$, nu există numerele q și r satisfăcînd condițiile cîtului și restului. Într-adevăr, relația $r < |b|$, devine $r < 0$, ori în enunț s-a presupus $r \geqslant 0$.

Clase de resturi modulo m. Fie m un număr natural. Împărțim mulțimea numerelor întregi în clase în modul următor: o clasă este formată din toate numerele întregi care împărțite la m dau același rest. O astfel de clasă se numește clasă de resturi modulo m. Deoarece resturile împărțirii la m sînt numerele $0, 1, 2..., m-1$, avem m clase disjuncte de resturi modulo m. Numerele întregi din clasa corespunzătoare restului 0 sînt numerele întregi de forma mk $(k \in Z)$, numerele întregi din clasa corespunzătoare restului 1 sînt numerele întregi de forma $mk + 1$ etc.

Exemple. Clasele de resturi modulo 4 sînt următoarele:

$$C_0 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8,...\} = \{4k \mid k \in Z\}$$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 0.

$$C_1 = \{... -7, -3, 1, 5, 9,...\} = \{4k + 1 \mid k \in Z\}$$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 1

$$C_2 = \{\ldots -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ldots\} = \{4k + 2 \mid k \in Z\}$$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 2.

$$C_3 = \{\ldots -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ldots\} = \{4k + 3 \mid k \in Z\}$$

— mulțimea numerelor întregi care împărțite la 4 dau restul 3.

Oricare număr dintr-o anumită *clasă* se numește *reprezentant* al acelei clase. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4, numerele -2, 2, 6, 10 sînt reprezentanți ai clasei C_2.

Dacă x este un reprezentant al unei clase de resturi, atunci aceasta se mai notează cu $\widehat{x}$. Cum într-o clasă există mai mulți reprezentanți, o clasă poate fi notată în mai multe feluri.

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4, clasa C_3 poate fi notată de pildă prin $\widehat{3}$, prin $\widehat{7}$, prin $-\widehat{1}$ etc.

Pentru notarea unei clase se preferă de obicei cel mai mic reprezentant pozitiv (restul împărțirii la m). De exemplu, clasele de resturi modulo 4 pot fi notate astfel: $\widehat{0}$, $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$.

Adunarea. Înmulțirea. În mulțimea claselor de resturi modulo m, definim două legi de compoziție, una notată aditiv și a doua notată multiplicativ, în modul următor:

$$\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a + b},$$

$$\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{a \cdot b}.$$

Se observă că suma, respectiv produsul, dintre clasa $\widehat{a}$ și $\widehat{b}$ este exprimată cu ajutorul reprezentanților a și b. Se poate arăta că oricare ar fi reprezentanții aleși pentru clasele $\widehat{a}$ și $\widehat{b}$, clasa sumei, respectiv a produsului este aceeași.

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 4 avem:

$$\widehat{2} + \widehat{3} = \widehat{2 + 3} = \widehat{5},$$

$$\widehat{2} \cdot \widehat{3} = \widehat{2 \cdot 3} = \widehat{6}.$$

Alegînd pentru clasa $\hat{2}$, ca reprezentant pe 6, iar pentru clasa 3 ca reprezentant pe -5, obţinem:

$$\hat{6} + \widehat{(-5)} = \widehat{6 + (-5)} = \hat{1},$$

$$\hat{6} \cdot \widehat{(-5)} = \widehat{6 \cdot (-5)} = \widehat{-30}.$$

Suma, respectiv produsul, nu depinde de alegerea reprezentanţilor folosiţi, căci $\hat{5} = \hat{1}$, respectiv $\hat{6} = \widehat{-30}$.

În mod uzual, cînd se fac calcule cu clase de resturi, se preferă cei mai mici reprezentanţi pozitivi.

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 7, se iau ca reprezentanţi unul din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pentru a calcula $\hat{5} + \hat{6}$ se procedează astfel: $\hat{5} + \hat{6} = \widehat{11}$, 11 împărţit la 7 dă restul 4; deci $\hat{5} + \hat{6} = \hat{4}$. Pentru a afla produsul acestor clase, se procedează astfel: $\hat{5} \cdot \hat{6} = \widehat{30}$, 30 împărţit la 7 dă restul 2; deci $\hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$.

Dăm mai jos tabelul adunării şi tabelul înmulţirii claselor de resturi modulo 5.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

5.1.13. **O lege de compoziţie pe mulţimea** R. Asociind oricărui cuplu (x, y) de numere reale numărul real $x \top y = 2x + y + 3xy$ definim pe mulţimea numerelor reale R o lege de compoziţie peste tot definită.

Avem, de exemplu:

$$4 \top 5 = 2 \cdot 4 + 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 8 + 5 + 60 = 73.$$

5.1.14. **Observări.** 1) Fie $\top$ o lege de compoziție peste tot definită între elementele unei mulțimi E. Dacă $a = b$ și $x = y$, $(a \in M,\ b \in M,\ x \in M,\ y \in M)$, atunci rezultă, evident, că $a \top x = b \top y$

$$(a = b \text{ și } x = y) \Rightarrow a \top x = b \top y.$$

În particular, dacă $a \in M$ și $x = y$ $(x \in M,\ y \in M)$, atunci $a \top x = a \top y$:

$$x = y \Rightarrow a \top x = a \top y.$$

Se spune în acest caz că egalitatea $a \top x = a \top y$ s-a obținut din egalitatea $x = y$, prin compunere la stînga cu a.

Analog, $x = y \Rightarrow x \top a = y \top a$. În acest caz se spune că egalitatea $x \top a = y \top a$ s-a obținut din egalitatea $x = y$, prin compunere la dreapta cu a.

Din egalitatea $a \top x = a \top y$, nu rezultă în general, $x = y$. De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 6, avem $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{2} \cdot \hat{1}$ și $\hat{4} \neq \hat{1}$.

ASOCIATIVITATE

5.1.15. În paragrafele precedente s-a pus în evidență faptul că fiind dată o lege de compoziție pe o mulțime E putem face calcule și cu trei, patru, sau mai multe elemente din E, utilizînd scrierea cu paranteze. În general, compusul a trei sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) depinde de așezarea parantezelor. Se știe, pe de altă parte, că în cazul unor legi de compoziție definite pe mulțimi de numere (adunarea, înmulțirea) parantezele pot fi omise, deoarece compusul este independent de modul în care se așază parantezele.

De exemplu, notația $3 + 17 + 13$ poate reprezenta fie $3 + (17 + 13) = 3 + 30 = 33$, fie $(3 + 17) + 13 = 20 + 13 = 33$, căci $3 + (17 + 13) = (3 + 17) + 13$.

În cazul împărțirii, lipsa parantezelor, poate duce la confuzii. De pildă scrierea $24 : 12 : 2$ poate fi interpretată ca $(24 : 12) : 2 = 2 : 2 = 1$ (aceasta este interpretarea curentă în aritmetică) sau ca $24 : (12 : 2) = 24 : 6 = 4$. În acest caz nu putem omite parantezele, scrierea $24 : 12 : 2$, fără o convenție prealabilă, fiind ambiguă.

Legile de compoziție interne, pentru care putem omite parantezele (calculele făcîndu-se însă de la „stînga la dreapta") se numesc legi de compoziție asociative. S-a constatat că dacă așezarea parantezelor nu influențează compusul a trei elemente, atunci compusul a patru, cinci sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) este de asemenea independent de așezarea parantezelor.

DEFINIȚIE. O lege de compoziție internă peste tot definită între elementele unei mulțimi E, notată cu semnul $\top$, se numește asociativă, dacă:
$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$, oricare ar fi elementele x, y, z (distincte sau nu) din E.

$$\forall x, y, z \in E : x \top (y \top z) = (x \top y) \top z.$$

Din definiție rezultă că o lege de compoziție peste tot definită între elementele unei mulțimi E este neasociativă dacă există un triplet (x, y, z) de elemente din E astfel încît:

$$x \top (y \top z) \neq (x \top y) \top z.$$

Adunarea în oricare din mulțimile numerice uzuale (N, Z, Q, R, C) precum și în orice mulțime de numere în care adunarea este peste tot definită, este asociativă, căci, oricare ar fi numerele x, y, z (distincte sau nu) avem:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Înmulțirea este asociativă în orice mulțime de numere în care înmulțirea este peste tot definită, căci, oricare ar fi numerele x, y, z avem:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Scăderea (respectiv împărțirea) nu sînt asociative căci, de exemplu: $24 - (4 - 2) = 24 - 2 = 22$ și $(24 - 4) - 2 = 20 - 2 = 18$, deci $24 - (4 - 2) \neq (24 - 4) - 2$, respectiv $24 : (4 : 2) = 24 : 2 = 12$ și $(24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3$ și deci $24 : (4 : 2) \neq (24 : 4) : 2$. În folosirea scrierii cu linie de fracție (cazul numerelor) se utilizează linii mici sau mari. Motivul trebuie căutat în faptul că împărțirea este neasociativă,

linia mare de fracție indicînd pe de-o parte o operație, iar pe de altă parte jucînd rol de paranteză. De pildă, $(24 : 4) : 2 = \frac{4}{2}$.

5.1.16. **Teorema de asociativitate.** Deoarece în cazul unei legi de compoziție asociative (notată cu semnul $\top$) compușii $x \top (y \top z)$ și $(x \top y) \top z$ sînt egali, se face convenția ca aceștia să fie notați cu semnul $x \top y \top z$, adică:

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = x \top y \top z.$$

Se poate demonstra că în cazul unei legi asociative compusul a patru sau mai multe elemente (considerate într-o anumită ordine) este același oricare ar fi modul de așezare a parantezelor. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema de asociativitate*. Vom justifica această afirmație în cazul a patru elemente.

Fie E o mulțime și o lege de compoziție internă în E, peste tot definită, notată cu semnul $\top$.

Compusul lui a cu b cu c cu $d(a \in E, b \in E, c \in E, d \in E)$ poate fi interpretat în următoarele moduri:

(1) $(a \top b) \top (c \top d)$,

(2) $[(a \top b) \top c] \top d$,

(3) $[a \top (b \top c)] \top d$;

(4) $a \top [(b \top c) \top d]$.

(5) $a \top [b \top (c \top d)]$.

Toți compușii (1), (2), (3), (4), (5) sînt egali. Să arătăm că: $[(a \top b) \top c] \top d = (a \top b) \top (c \top d)$ (compusul (2) este egal cu compusul (1)).

Avem: $[(a \top b) \top c] \top d =$

$= [x \top c] \top d =$ (s-a notat $a \top b$ cu x)

$= (x \top c) \top d =$

$= x \top (c \top d) =$ (s-a aplicat asociativitatea)

$= (a \top b) \top (c \top d)$ (s-a înlocuit x cu $a \top b$)

Demonstrația pentru celelalte egalități o propunem ca exercițiu.

Oricare dintre compușii egali (1), (2), (3), (4), (5) se notează cu semnul $a \top b \top c \top d$.

În cazul unei legi de compoziție asociative compusul a cinci sau mai multe elemente se notează de asemenea fără paranteze.

5.1.17. **Exemple.** a) *Reuniunea, respectiv intersecția sînt legi de compoziție, asociative, căci oricare ar fi mulțimile A, B, C, avem:*

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, respectiv
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Vom scrie, conform cu convenția deja făcută, $A \cup B \cup C$ în loc de $A \cup (B \cup C)$, respectiv $(A \cup B) \cup C$ și $A \cap B \cap C$ în loc de $A \cap (B \cap C)$, respectiv $(A \cap B) \cap C$.

b) Compunerea funcțiilor (5.1.6) este o lege de compoziție asociativă în mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori în E.

Într-adevăr, fie funcțiile $f : E \to E$, $g : E \to E$ și $h : E \to E$.

Fie $h(x) = y$, $g(y) = z$, $f(z) = t$. Avem:

$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = f(g(y) = f(z)) = t$ (fig. 33) și

$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(y) = f(z) = t$ (fig. 34).

Așadar, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, căci funcțiile $f \circ (g \circ h)$ și $(f \circ g) \circ h$ sînt ambele definite pe E, iau valori în E și realizează aceeași corespondență:

$$f \circ (g \circ h) : x \to t$$

$$(f \circ g) \circ h : x \to t.$$

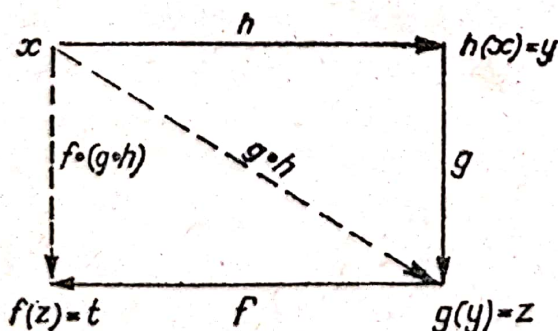


Fig. 33.

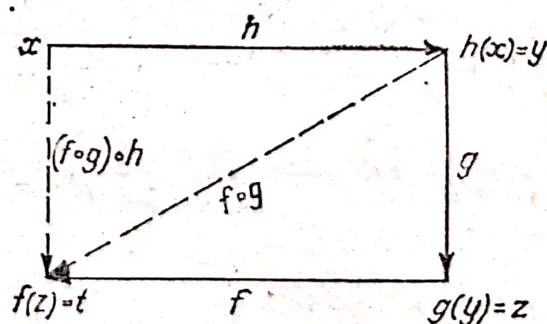


Fig. 34.



În particular, *compunerea permutărilor* (5.1.7.), *compunerea transformărilor punctuale* (5.1.9) sînt legi de compoziție *asociative*.

c) Adunarea vectorilor de poziție este asociativă, căci oricare ar fi vectorii de poziție $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, avem:

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3).$$

d) Adunarea și înmulțirea matricelor pătrate de ordinul n sînt legi de compoziție asociative, căci oricare ar fi matricele pătrate A, B, C, de ordinul n, avem:
$(A + B) + C = A + (B + C)$ și $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

e) Adunarea, respectiv înmulțirea în clasele de resturi modulo m este *asociativă*. Într-adevăr,

$$(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \widehat{a + b} + \hat{c} = \widehat{(a+b)+c} = \widehat{a+(b+c)} = \hat{a} + \widehat{b + c} =$$
$$= \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}),$$ respectiv

$$(\hat{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{c} = \widehat{a \cdot b} \cdot \hat{c} = \widehat{(a \cdot b) \cdot c} = \widehat{a \cdot (b \cdot c)} = \hat{a} \cdot \widehat{(b \cdot c)} = \hat{a} \cdot (\hat{b} \cdot \hat{c}).$$

COMUTATIVITATE

5.1.18. Posibilitatea schimbării ordinei elementelor oferă simplificări considerabile în calcule. În cazul adunării și înmulțirii numerelor se știe că:

$$x + y = y + x, \text{ respectiv } x \cdot y = y \cdot x.$$

Legile de compoziție interne care îndeplinesc o condiție analogă cu cea menționată în cazul adunării și înmulțirii la numere se numesc legi de compoziție comutative.



DEFINIȚIE. O lege de compoziție internă, peste tot definită între elementele unei mulțimi E, notată cu semnul $\top$, este comutativă dacă, oricare ar fi elementele x și y din E avem:

$x \top y = y \top x.$
$\forall x, y \in E : x \top y = y \top x.$

Din definiţie rezultă că o lege de compoziţie internă, peste tot definită, între elementele unei mulţimi E, notată cu semnul $\top$, este necomutativă dacă există două elemente x şi y astfel încît:

$$x \top y \neq y \top x.$$

5.1.19. Teorema de comutativitate. După cum am precizat la (5.1.16), în cazul unei legi asociative compusul a trei, sau mai multe elemente este acelaşi oricare ar fi modul de aşezare a parantezelor.

În cazul unei legi asociative şi comutative, se poate arăta că compusul a trei, sau mai multe elemente este acelaşi, oricare ar fi modul de aşezare a parantezelor şi ordinea în care se scriu elementele. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *teorema de comutativitate.*

În cazul a trei elemente compusul lui a cu b cu c se poate calcula, în mai multe moduri, ca de exemplu:

(1) $(a \top b) \top c$ (notaţie: $a \top b \top c$)

(2) $(c \top b) \top a$ (notaţie: $c \top b \top a$)

(3) $c \top (a \top b)$ (notaţie: $c \top a \top b$).

Toţi compuşii aceştia sînt egali. Vom verifica această afirmaţie în cazul compuşilor (1) şi (2).

Avem:

$(c \top b) \top a =$

$= (b \top c) \top a =$ (comutativitatea aplicată elementelor c şi b)

$= a \top (b \top c) =$ (comutativitatea aplicată elementelor $b \top c$ şi a)

$= (a \top b) \top c$ (asociativitatea).

5.1.20. Exemple. a) Reuniunea şi intersecţia sînt legi de compoziţie comutative căci, oricare ar fi mulţimile A şi B, avem:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{şi} \quad A \cap B = B \cap A.$$

b) Compunerea funcţiilor definite pe o mulţime E, cu valori în E, care are cel puţin două elemente, este necomutativă.

Într-adevăr, fie $x_1 \in E$ şi $x_2 \in E$, cu $x_1 \neq x_2$ şi funcţiile $f : E \to E$, $g : E \to E$ date prin $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq x_1 \\ x_2, & x = x_1 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq x_2 \\ x_1, & x = x_2 \end{cases}$

Avem $f(g(x_1)) = f(x_1) = x_2$ şi $g(f(x_1)) = g(x_2) = x_1$. Aşadar, $f \circ g \neq g \circ f$.

c) Compunerea permutărilor asupra unei mulțimi E cu cel puțin trei elemente este necomutativă.

Într-adevăr, fie

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 2 & 1 & 3 & 4 \ldots n \end{pmatrix} \text{ și } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 3 & 1 & 2 & 4 \ldots n \end{pmatrix}. \text{ Avem:}$$

$$\Pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 3 & 2 & 1 & 4 \ldots n \end{pmatrix} \text{ și } \sigma \circ \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \\ 1 & 3 & 2 & 4 \ldots n \end{pmatrix}$$

Se observă că $\Pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \Pi$.

d) Adunarea vectorilor de poziție este o lege de compoziție comutativă, căci $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (fig. 35).

e) Compunerea translațiilor și a rotațiilor sînt legi de compoziție comutative căci:

$$t_{\vec{v}_1} \circ t_{\vec{v}_2} = t_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} = t_{\vec{v}_2 + \vec{v}_1} = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1} \text{ și}$$

$$R(\alpha) \circ R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\beta + \alpha) = R(\beta) \circ R(\alpha).$$

f) Adunarea matricelor pătrate de ordinul n este comutativă, căci oricare ar fi matricele pătrate A și B de ordinul n, avem $A + B = B + A$ (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

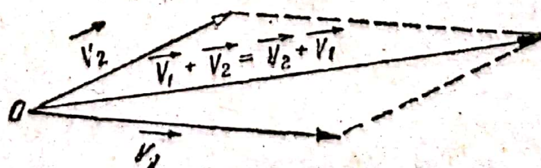
Înmulțirea matricelor pătrate de ordinul n este necomutativă (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

g) Adunarea, respectiv înmulțirea în clasele de resturi modulo m, este comutativă. Într-adevăr,

$$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a + b} = \widehat{b + a} = \hat{b} + \hat{a}, \text{ respectiv}$$

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b} = \widehat{b \cdot a} = \hat{b} \cdot \hat{a}.$$

Fig. 35.



5.1.21. Numerele 0 și 1 sînt „fără efect" la adunare, respectiv înmulțire. Mai precis:

(a) $0 + x = x + 0 = x$, oricare ar fi $x \in R$,

(b) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, oricare ar fi $x \in R$.

Se spune că 0 este *element neutru* pentru adunare, iar 1 este element *neutru* pentru înmulțire.

DEFINIȚIE. Fie E o mulțime pe care este dată o lege de compoziție peste tot definită, notată cu semnul $\top$. Dacă există un element $e \in E$, astfel încît:

$$e \top x = x \top e = x$$

oricare ar fi $x \in E$, acesta se numește element neutru pentru legea $\top$.

Observări. a) În cazul unei legi de compoziție comutative condiția $e \top x = x \top e = x$, poate fi înlocuită cu $e \top x = x$ sau $x \top e = x$, căci $x \top e = e \top x$.

b) Dacă legea este notată aditiv, atunci elementul neutru se notează cu 0. (prin analogie cu notația de la numere) și se numește *zero*. Avem: $x + 0 = 0 + x = x$. Dacă legea de compoziție este notată multiplicativ, atunci elementul neutru se notează cu 1 (prin analogie cu notația de la numere) sau cu e și se numește *element unitate*. Avem $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, respectiv $x \cdot e = e \cdot x = x$.

5.1.22. **Unicitatea elementului neutru.**

Dacă există un element neutru e, acesta este unic.

Într-adevăr să presupunem că ar exista două elemente neutre e și e'. Considerăm compusul $e \top e'$.

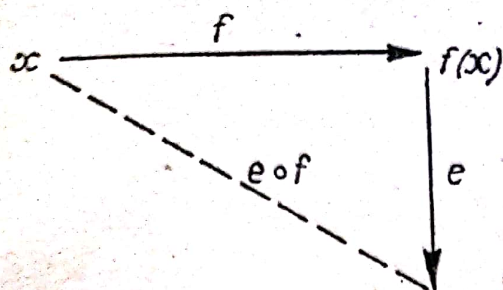
e, fiind element neutru, avem: $e \top e' = e'$.

e', fiind element neutru avem: $e \top e' = e$. Deci $e = e'$.

5.1.23. **Exemple.** a) În mulțimea părților unei mulțimi E, mulțimea vidă este element neutru pentru reuniune, iar mulțimea E este element neutru pentru intersecție.

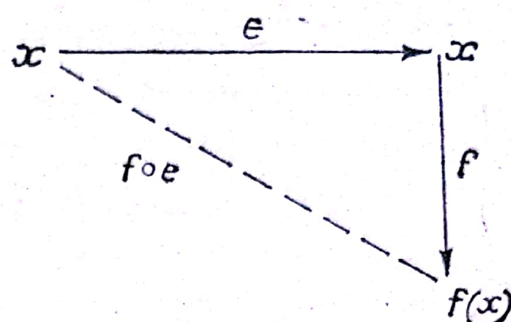
Într-adevăr, oricare ar fi partea X a lui E, avem:

$$X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X,$$
$$X \cap E = E \cap X = X.$$



$e \circ f = f$

Fig. 36.



$f \circ e = f$

Fig. 37.

b) În mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori într-o mulțime E, aplicația identică e a mulțimii E ($e(x) = x$, $x \in E$) este element neutru pentru compunere.

Într-adevăr, dacă f este o funcție definită pe E cu valori în E, avem:
$(e \circ f)(x) = e(f(x)) = f(x)$; $e \circ f = f$ (fig. 36),
$(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x)$; $f \circ e = f$ (fig. 37).

Așadar, $e \circ f = f \circ e = f$.

În particular, permutarea identică este element neutru, pentru compunere, în mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi.

c) În mulțimea vectorilor de poziție, vectorul nul $\vec{0}$ este element neutru, căci $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

d) În cazul transformărilor punctuale, transformarea identică a planului este element neutru pentru compunere. Translația $t_{\vec{0}}$ de vector nul este element neutru în mulțimea translațiilor căci $t_{\vec{v}} + t_{\vec{0}} = t_{\vec{0}} + t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}$. Rotația $R(0)$ de unghi 0 este element neutru în mulțimea rotațiilor de același centru, căci:

$$R(\alpha) \circ R(0) = R(0) \circ R(\alpha) = R(\alpha).$$

e) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, matricea

$$\|0\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$ este element neutru pentru adunare.

Într-adevăr, oricare ar fi matricea pătrată A, de ordinul n, avem: $A + \|0\| = \|0\| + A = A$ (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

În mulţimea matricelor pătrate de ordinul n, matricea

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

este element neutru pentru înmulţire, căci oricare ar fi matricea A, pătrată de ordinul n, avem: $A \cdot E = E \cdot A = A$ (manualul de algebră pentru clasa a XI-a).

f) În mulţimea claselor de resturi modulo m, clasa $\hat{0}$, respectiv $\hat{1}$, este element neutru pentru adunare, respectiv înmulţire.

Într-adevăr,

$$\hat{0} + \hat{a} = \widehat{0 + a} = \hat{a}, \text{ respectiv}$$
$$\hat{1} \cdot \hat{a} = \widehat{1 \cdot a} = \hat{a}.$$

ELEMENTE SIMETRICE

5.1.24. Se ştie că pentru orice număr real x, există un număr real notat $-x$, cu proprietatea:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \text{ (a)}.$$

Pentru orice număr real $x \neq 0$ există un număr, notat $\frac{1}{x}$ sau x^{-1}, astfel încît:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \quad \text{(b)}$$

Elementul $-x$ se mai numeşte *simetricul* lui x pentru adunare, iar elementul x^{-1} se mai numeşte *simetricul* lui x pentru înmulţire.

DEFINIŢIE. Fie E o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie, notată cu semnul $\top$, faţă de care există element neutru e. Un element $x' \in E$ se numeşte simetricul lui x pentru legea $\top$, dacă $x \top x' = x' \top x = e$.

Dacă legea de compoziţie este notată aditiv atunci simetricul lui x, cînd există, se notează cu $-x$ şi acesta se mai numeşte *opusul* lui x (notaţia şi terminologia analogă cu cea de la numere). În acest caz: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Dacă legea de compoziţie este notată multiplicativ, atunci simetricul lui x, cînd există, se notează cu x^{-1} şi acesta se mai numeşte *inversul* lui x (notaţie şi terminologie analogă cu cea de la numere). În acest caz: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Observări. a) Existenţa elementelor simetrice este condiţionată de existenţa elementului neutru. Într-o lege de compoziţie, fără element neutru, problema existenţei elementelor simetrice nu se pune.

b) Dacă legea de compoziţie este comutativă, atunci condiţia $x\top x'=x'\top x=e$, poate fi înlocuită cu condiţia $x\top x' = e$ sau $x'\top x = e$, căci $x\top x' = x'\top x$.

c) Elementul neutru e admite ca simetric pe el însuşi: $e\top e = e$.

5.1.25. **Unicitatea elementului simetric**

Fie $\top$ o lege de compoziţie asociativă definită într-o mulţime E, $(e$, elementul neutru$)$. Dacă $x \in E$ admite un simetric x', atunci acesta este unic. Să presupunem că elementul x admite două simetrice x' şi x''. Aceasta înseamnă că:

$$x \top x' = x' \top x = e \qquad \text{(a)}$$
$$x \top x'' = x'' \top x = e \qquad \text{(b)}$$

şi

compunînd la stînga cu x'', egalitatea $x \top x' = e$ (a) obţinem, pe rînd:

$x \top x' = e$	(egalitatea (a))
$x'' \top (x \top x') = x'' \top e$	(am compus la stînga cu x'')
$(x'' \top x) \top x' = x'' \top e$	(s-a folosit asociativitatea)
$(x'' \top x) \top x' = x''$	(s-a ţinut seama că e este element neutru)
$e \top x' = x''$	(s-a ţinut seama că x'' este simetricul lui x — relaţia (b)).
$x' = x''$	(s-a folosit faptul că e este element neutru: $e \top x' = x'$),

ceea ce a fost de demonstrat.

5.1.26. **Exemple.** a) În mulţimea părţilor unei mulţimi E, singurul element care admite un simetric pentru reuniune este mulţimea vidă $\varnothing$ (elementul neutru este mulţimea vidă).

Într-adevăr, relaţia $A \cup A' = \varnothing$ este adevărată atunci şi numai atunci cînd $A = A' = \varnothing$.

Avem: $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ (simetricul lui $\varnothing$ este $\varnothing$).

În mulțimea părților unei mulțimi E, singurul element care admite un simetric pentru intersecție este mulțimea E. Justificare analogă cu cazul precedent (elementul neutru este mulțimea E).

b) În mulțimea funcțiilor definite pe o mulțime E cu valori în aceeași mulțime, singurele elemente care admit simetrice față de compunere sînt funcțiile bijective (elementul neutru este aplicația identică e). Dacă funcția $f : E \to E$ este bijectivă atunci simetricul lui f este funcția inversă $f^{-1} : E \to E$. Avem: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. (Manualul de analiză pentru clasa a XI-a).

c) În mulțimea permutărilor asupra unei mulțimi $E = \{1, 2, \ldots \ldots n\}$ orice permutare (aplicația bijectivă) admite element simetric, față de compunere (elementul neutru este permutarea identică).

Verificăm afirmația în cazul permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

Fie $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ o permutare asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

Inversa acestei permutări este permutarea

$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Într-adevăr,

$$f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = e.$$

$$f^{-1} \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Așadar, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. Vom mai scrie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

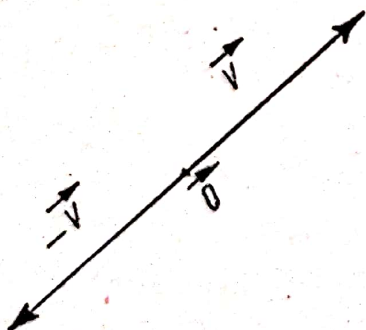


Fig. 38.

d) În mulțimea vectorilor de poziție, orice vector admite un element simetric (fig. 38) notat $-\vec{v}$.

Avem: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$.

e) Orice translație admite un element simetric pentru compunere:

Avem: $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$. Într-adevăr

$t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{v}} = t_{\vec{0}}$ (compunerea translațiilor este comutativă: $t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{v}} = t_{-\vec{v}} \circ t_{\vec{v}}$).

În mulțimea rotațiilor de același centru, fiecare rotație admite un element simetric pentru compunere.

Avem: $R^{-1}(\alpha) = R(-\alpha)$.

Într-adevăr:

$R(\alpha) \circ R^{-1}(\alpha) = R(\alpha) \circ R(-\alpha) = R(\alpha + (-\alpha)) = R(0)$ (compunerea rotațiilor este comutativă: $R^{-1}(\alpha) \circ R(\alpha) = R(\alpha) \circ R^{-1}(\alpha)$).

f) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, orice matrice $A = \|a_{ij}\|$ admite un opus, matricea $-A = \|-a_{ij}\|$. Avem: $A + (-A) = (-A) + A = \|0\|$.

În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, matricele nesingulare (cele care au determinantul diferit de 0) sînt singurele matrice inversabile (manualul de algebră de clasa a XI-a). Într-adevăr, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci există A^{-1}, astfel încît $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (E; matricea unitate).

g) În mulțimea claselor de resturi, modulo un număr natural, orice element admite un simetric față de adunare (orice element are un opus).

Avem:

$$-\hat{x} = \widehat{-x}.$$

Într-adevăr, $\hat{x} + (\widehat{-x}) = \widehat{x + (-x)} = \hat{0}$. Deci $-\hat{x} = \widehat{-x}$.

De exemplu, în mulțimea claselor de resturi modulo 5, avem:

$$-\hat{0} = \hat{0}$$
$$-\hat{1} = \widehat{-1} = \hat{4}$$
$$-\hat{2} = \widehat{-2} = \hat{3}$$
$$-\hat{3} = \widehat{-3} = \hat{2}$$
$$-\hat{4} = \widehat{-4} = \hat{1}.$$

Se poate demonstra că în mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural prim, orice element diferit de $\hat{0}$ admite un simetric față de înmulțire.

De exemplu, în mulţimea claselor de resturi modulo 5, avem

$(\hat{1})^{-1} = \hat{1}$ Verificare: $(\hat{1})^{-1} \cdot \hat{1} = \hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}$

$(\hat{2})^{-1} = \hat{3}$ Verificare: $(\hat{2})^{-1} \cdot \hat{2} = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{6} = \hat{1}$

$(\hat{3})^{-1} = \hat{2}$ Verificare: $(\hat{3})^{-1} \cdot \hat{3} = \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6} = \hat{1}$

$(\hat{4})^{-1} = \hat{4}$ Verificare: $(\hat{4})^{-1} \cdot \hat{4} = \hat{4} \cdot \hat{4} = \widehat{16} = \hat{1}$.

În cazul claselor de resturi modulo un număr natural m neprim există elemente care nu admit simetrice faţă de înmulţire (divizorii proprii ai lui m).

De exemplu, în cazul claselor de resturi modulo 12, elementul $\hat{3}$ nu admite un invers.

Într-adevăr, să presupunem că $\hat{3}$ ar admite ca invers pe $\hat{x}(x \in Z)$.

Atunci $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{1}$, sau $\widehat{3 \cdot x} = \hat{1}$, de unde $3x - 1 = 12k$.

Din ultima egalitate, deducem $3(x - 4k) = 1$, de unde rezultă că 3 divide pe 1, ceea ce este fals.

DISTRIBUTIVITATE

5.1.27. Se ştie că în calculul cu numere, proprietatea care face legătura între adunare şi înmulţire este proprietatea de distributivitate:

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{(a)}$$
$$(y + z) \cdot x = yx + zx \quad \text{(b)}$$

Această proprietate joacă un rol esenţial în calculele unde apar aceste două operaţii.

DEFINIŢIE. Fie E o mulţime înzestrată cu două legi de compoziţie interne peste tot definite notate cu semnele $\top$ şi $\perp$. Se spune că legea $\top$ este distributivă faţă de legea $\perp$ dacă oricare ar fi x, y, z distincte sau nu din E, avem:

(1) $$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z) \text{ şi}$$

(2) $$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (x \top z)$$

În cazul că prima lege este notată multiplicativ iar a doua aditiv, relațiile (1) și (2) devin:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

Observare. În cazul cînd legea notată cu semnul $\cdot$ este distributivă față de legea notată cu semnul $+$, și legea $\cdot$ este comutativă, atunci condițiile (1) și (2) sînt îndeplinite, dacă este îndeplinită numai una dintre ele.

5.1.28. **Exemple.** Se demonstrează că, în mulțimea părților unei mulțimi E, intersecția este distributivă față de reuniune și reuniunea este distributivă față de intersecție, adică oricare ar fi părțile A, B, C ale lui E, avem:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \text{ respectiv,}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

S-a scris o singură relație, pentru fiecare caz, deoarece intersecția, respectiv reuniunea este comutativă.

b) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, înmulțirea este distributivă față de adunare, căci oricare ar fi matricea A, B, C, din mulțimea considerată, avem:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1)$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad (2)$$

c) În mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural, înmulțirea este distributivă față de adunare.

Aceasta înseamnă că oricare ar fi elementele $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$, dintr-o mulțime de clase de resturi avem:

$$\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = (\hat{x} \cdot \hat{y}) + (\hat{x} \cdot \hat{z}).$$

Într-adevăr, $\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = \hat{x} \cdot (\widehat{y + z}) = \widehat{x \cdot (y + z)} = \widehat{x \cdot y + x \cdot z} =$

$$= \widehat{x \cdot y} + \widehat{x \cdot z} = \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{x} \cdot \hat{z}.$$

5.2. STRUCTURI ALGEBRICE: GRUP, INEL, CORP

5.2.1. Introducere. S-a văzut în paragrafele precedente, că prin darea unei legi de compoziţie (sau mai multe) pe o mulţime, avem posibilitatea de a face calcule cu elementele mulţimii respective, asemănătoare, din unele puncte de vedere, cu calculele din algebra elementară. În algebră interesează acele legi de compoziţie care au simultan mai multe proprietăţi.

O lege de compoziţie între elementele unei mulţimi care îndeplineşte anumite condiţii, se spune că determină pe mulţimea respectivă o *structură algebrică*. Condiţiile respective se mai numesc *axiomele* structurii, căci din ele rezultă toate proprietăţile (teoremele structurii respective*).

Exemplu. S-a observat că mulţimile Z, Q, R, C înzestrate cu adunarea, mulţimea permutărilor asupra unei mulţimi înzestrate cu operaţia de compunere, mulţimea matricelor pătrate de ordinul n înzestrată cu adunarea, mulţimea claselor de resturi modulo n, înzestrată cu adunarea etc. au o particularitate comună:

Operaţia considerată este *asociativă*, există *element neutru*, orice element admite un *simetric*.

S-a constatat, în plus, că din aceste condiţii rezultă un număr foarte mare de consecinţe şi aceasta a determinat interesul de a studia proprietăţile unei legi de compoziţie, definită pe o mulţime arbitrară, *asociativă*, cu *element neutru*, astfel încît orice element să admită un *simetric*. A apărut astfel structura algebrică de grup, caracterizată de următoarele *axiome*:

A. *Asociativitate*,

B. *Existenţa elementului neutru*,

C. *Orice element admite un simetric.*

---

* În afară de structurile algebrice, în matematică mai sînt cunoscute următoarele structuri: 1. *structura de ordine* (caracterizată prin darea unei relaţii de ordine) şi 2. *structura topologică* (prezentarea axiomelor acestei structuri depăşeşte cu mult cadrul acestui manual).

Toate proprietățile care rezultă din aceste axiome sînt, în particular, adevărate în grupurile concrete cunoscute, cum ar fi cele menționate mai înainte.

Numărul mare de proprietăți, pe care le au grupurile, precum și numeroasele aplicații pe care le au acestea în alte ramuri ale matematicii, au determinat pe algebriști să studieze în mod special structura de grup. S-a creat astfel un capitol vast al Algebrei, cunoscut sub denumirea de *Teoria Grupurilor*.

Asupra structurii de *grup* vom reveni în paragraful următor.

Cele mai importante structuri algebrice sînt următoarele: *grupul*, *inelul*, *corpul*, *modulul*, *spațiul vectorial*, *algebra*. În acest manual nu vom studia decît primele trei.

Mai precizăm, pentru a înlătura eventualele confuzii existente, că prin *axiome* nu trebuie înțeles niște adevăruri evidente din punct de vedere intuitiv (așa cum se afirmă în mod eronat, uneori, despre axiomele geometriei), ci un sistem de propoziții din care rezultă toate proprietățile din teoria respectivă. Alegerea unui sistem de axiome nu se face în mod arbitrar. Se are în vedere să decurgă din ele, pe cît posibil mai ușor, proprietăți care să justifice importanța teoriei respective și să permită aplicarea teoriei respective la modele concrete importante.

În mod curent, cînd s-a stabilit un sistem convenabil de axiome, pentru o teorie, se spune că s-a făcut *axiomatizarea* teoriei respective și că deducerea proprietăților (teoremelor) teoriei respective se face prin *metoda axiomatică*.

Menționăm, în plus că, în general, o teorie poate fi axiomatizată în mai mule moduri echivalente, astfel încît există posibilitatea ca o propoziție care este *axiomă* într-o *axiomatizare*, să devină *teoremă* (consecință) în alt sistem de axiome.

Pentru exemplificare, vom considera cazul grupurilor. Se poate demonstra că în cazul unei mulțimi G înzestrate cu o lege de compoziție notată multiplicativ, asociativă (A), cu element neutru (N), astfel încît orice element admite un simetric (S) (axiomele grupului), rezultă că (T): „orice ecuație $ax = b$ și $xa = b$ are soluție unică“ ($a \in G$, $b \in G$, $x \in G$). În cadrul sistemului de axiome (A), (N), (S), propoziția (T) este o teoremă (se va demonstra această afirmație

în paragraful următor). Se poate arăta că dacă se consideră o mulțime G înzestrată cu o lege de compoziție asociativă (A), astfel, încît „orice ecuație de forma $xa = b$ și $ax = b$ are soluție unică" (T), atunci G este un grup în accepția anterioară. În acest al doilea caz axiome sînt propozițiile (A) și (T), iar propozițiile (N) și (S) sînt teoreme (rezultă din axiomele (A) și (T)).

În zilele noastre, marea majoritate a teoriilor din matematică sînt axiomatizate și se fac chiar încercări, unele reușite, de axiomatizare a unor capitole din științe mai puțin înrudite cu matematica.

GRUPURI

5.2.2. DEFINIȚIE. O lege de compoziție între elementele unei mulțimi G, determină pe aceasta o structură de grup dacă:
(P) legea de compoziție este peste tot definită,
(A) legea de compoziție este asociativă,
(N) există element neutru,
(S) orice element din G admite un simetric.

Mulțimea G înzestrată cu o structură de grup, poartă numele de *grup*.

Dacă, în plus, legea de compoziție este *comutativă*, se spune că grupul este *comutativ* sau *abelian*.

Condițiile (P), (A), (N), (S) sînt, așadar, *axiomele* grupului*. Dacă legea de compoziție este notată cu semnul $\top$, axiomele grupului pot fi redactate explicit, astfel:

(P) Compusul $x \top y$ este definit, oricare ar fi elementele $x \in G$ și $y \in G$ (distincte sau nu).

(A) $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$ (oricare ar fi x, y, z elemente distincte sau nu din G).

(N) Există în G un element e astfel încît $e \top x = x \top e = x$ (oricare ar fi $x \in G$).

* În mod curent condiția (P) nu este menționată printre axiomele grupului. Noi am trecut această condiție printre axiome, pentru a preîntîmpina unele greșeli curente, izvorîte din faptul că nu sîntem în posesia unor noțiuni (parte stabilă, subgrup) care ar permite evitarea greșelilor.

(S) Pentru orice $x \in G$, există un element $x' \in G$ astfel încît:

$$x \top x' = x' \top x = e.$$

Dacă legea de compoziție este notată aditiv, respectiv multiplicativ, axiomele grupului sînt următoarele:

TRANSCRIERE ADITIVĂ

(P) $x + y$ este definit, oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$ (evident, $x + y$ trebuie să aparțină lui G).
(A) $x + (y + z) = (x + y) + z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$.
(N) există în G un element notat cu 0 — elementul neutru — astfel încît: $x + 0 = 0 + x = x$, oricare ar fi $x \in G$.

(S) Pentru orice $x \in G$, există un element opus $(-x) \in G$ (simetricul lui x) astfel încît:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

În cazul cînd legea de compoziție notată aditiv, determină o structură de grup, se mai spune că grupul respectiv este un *grup aditiv*.

TRANSCRIERE MULTIPLICATIVĂ

(P) $x \cdot y$ este definit, oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$ (evident $x \cdot y$ trebuie să aparțină lui G).
(A) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$.
(N) există în G, un element notat cu 1, respectiv e, astfel încît: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, respectiv $x \cdot e = ex = x$, oricare ar fi $x \in G$.
(S) Pentru orice $x \in G$, există un element invers $x^{-1} \in G$ (simetricul lui x) astfel încît:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

În cazul cînd legea de compoziție, notată multiplicativ, determină o structură de grup, se mai spune că grupul respectiv este un grup *multiplicativ*.

5.2.3. **Exemple.** a) Mulțimea numerelor naturale N, înzestrată cu adunarea respectiv înmulțirea nu este un grup, căci, de exemplu, condiția (S) nu este îndeplinită.

Într-adevăr, de pildă elementul 3 nu admite un opus (-3), respectiv un invers $\left(3^{-1} = \frac{1}{3}\right)$ care să aparțină lui N. Condiția (S) nu este îndeplinită.

b) Mulțimea Z a numerelor întregi formează un grup față de adunare, *grupul aditiv al numerelor întregi*.

Într-adevăr:

(P) Dacă $x \in Z$ şi $y \in Z$, atunci $x + y \in Z$ (suma a două numere întregi este un număr întreg). Adunarea este o lege de compoziţie peste tot definită în mulţimea numerelor întregi.

(A) Adunarea, în mulţimea numerelor întregi, este asociativă:

$x + (y + z) = (x + y) + z$, oricare ar fi $x \in Z$, $y \in Z$, $z \in Z$.

(N) În Z există un element neutru, elementul 0:

$$x + 0 = 0 + x = x, \text{ oricare ar fi } x \in Z.$$

(S) Pentru orice $x \in Z$, există un element $-x \in Z$ (elementul simetric al lui x) astfel încît:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Deoarece adunarea este şi comutativă ($x + y = y + x$, oricare ar fi numerele întregi x şi y), grupul aditiv al numerelor întregi este un grup *comutativ*.

Mulţimea Z a numerelor întregi nu formează grup faţă de înmulţire. Într-adevăr, nici un element, diferit de ± 1, nu admite un simetric faţă de înmulţire. Condiţia (S) nu este îndeplinită.

c) *Mulţimea Q a numerelor raţionale formează grup comutativ faţă de adunare, grupul aditiv al numerelor raţionale.* Justificarea acestei afirmaţii se face în mod analog, ca în cazul grupului aditiv al numerelor întregi.

Mulţimea Q a numerelor raţionale nu formează grup faţă de înmulţire. Într-adevăr, sînt îndeplinite condiţiile (P), (A), (N), dar nu este îndeplinită condiţia (S), căci în Q există un element, elementul 0, care nu este inversabil.

d) Mulţimea $Q' = Q \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor raţionale diferite de 0) formează grup faţă de înmulţire, grupul multiplicativ al numerelor raţionale diferite de 0, căci: (P). Dacă $x \in Q'$ şi $y \in Q'$, atunci $x \cdot y \in Q'$. (Produsul a două numere raţionale diferite de 0 este un număr raţional diferit de 0.) Înmulţirea este peste tot definită în Q'.

(A) Înmulţirea în Q' este asociativă:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ (oricare ar fi } x, y, z \in Q'\text{)}.$$

(N) În Q' există un element neutru pentru înmulțire, elementul 1. Într-adevăr,

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \text{ oricare ar fi } x \in Q'.$$

(S) Pentru orice element x din Q', există un element x^{-1} (inversul lui x) astfel încît:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Deoarece înmulțirea este comutativă, rezultă că *grupul multiplicativ al numerelor raționale este comutativ*.

În mod analog se justifică următoarele afirmații:

e) Adunarea determină pe mulțimea numerelor reale o structură de grup, *grupul aditiv al numerelor reale*. Acest grup este *comutativ*.

f) Adunarea determină pe mulțimea numerelor complexe o structură de grup, *grupul aditiv al numerelor complexe*.

Acest grup este comutativ.

Înmulțirea nu determină pe mulțimea numerelor reale, respectiv mulțimea numerelor complexe, o structură de grup. (Numărul real 0, respectiv numărul complex 0, nu admite simetric.)

g) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor reale diferite de 0 ($R \setminus \{0\}$) o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de* 0. Acest grup este comutativ.

h) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor complexe diferite de 0 ($C \setminus \{0\}$) o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor complexe diferite de* 0.

i) Înmulțirea determină pe mulțimea numerelor reale pozitive R_+ o structură de grup, *grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive*. Într-adevăr,

(P) Înmulțirea este peste tot definită în mulțimea R_+, căci produsul a două numere reale pozitive este un număr real pozitiv.

(A) Înmulțirea este asociativă.

(N) În R_+ există element neutru, pentru înmulțire, elementul 1 ($1 \in R_+$).

(S) Inversul unui număr real pozitiv este tot un număr real pozitiv.

j) *În mulțimea $\mathcal{F}$ a aplicațiilor bijective ale unei mulțimi E pe ea însăși, compunerea determină o structură de grup.*

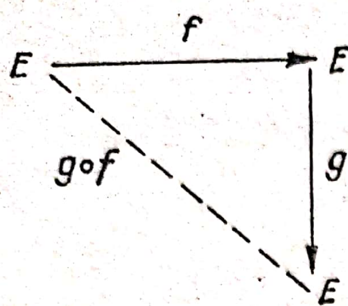


Fig. 39.

Pentru demonstrația acestei afirmații verificăm axiomele grupului. (P) Prin compunerea a două funcții bijective definite pe o mulțime E cu valori în E, obținem o funcție bijectivă definită pe E cu valori în E. Într-adevăr, fie $g : E \to E$ și $f : E \to E$ două aplicații bijective (deci injective și surjective).

1) Funcția $g \circ f$ este definită pe E cu valori în E (fig. 39).

2) Funcția $g \circ f$ este bijectivă, căci sînt adevărate următoarele implicații:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ (Funcția f este injectivă)

$\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. (Funcția g este injectivă.)

3) Funcția $g \circ f$ este surjectivă, căci, oricare ar fi $z \in E$, există $y \in E$, astfel încît $z = g(y)$ și oricare ar fi $y \in E$, există $x \in E$, astfel încît $y = f(x)$ și deci $z = g(f(x))$; oricare ar fi $z \in E$, există $x \in E$, astfel încît $z = g(f(x))$.

Compunerea aplicațiilor bijective definite pe E cu valori în E este o lege de compoziție peste tot definită (condiția (P)).

(A) Compunerea aplicațiilor bijective $f : E \to E$ este asociativă. (S-a demonstrat la 5.1.17, (b).

(N) În mulțimea aplicațiilor bijective $f : E \to E$, aplicația identică e, $e(x) = x$, care este bijectivă, este element neutru (5.1.23, b).

$e \circ f = f \circ e = f$, oricare ar fi aplicația bijectivă $f : E \to E$.

(S) Pentru orice aplicația bijectivă $f : E \to E$, există o aplicație bijectivă $f^{-1} : E \to E$ (5.1.26(b)), inversa funcției f (aplicația f fiind bijectivă, este inversibilă) astfel încît:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e.$$

Grupul aplicațiilor bijective $f : E \to E$ (grup față de compunere) se mai numește *grupul transformărilor mulțimii E*.

Dacă mulțimea E are cel puțin trei elemente x_1, x_2, x_3 atunci grupul transformărilor mulțimii E este *necomutativ*.

Într-adevăr, fie $f : E \to E$ şi $g : E \to E$ două aplicaţii bijective definite astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \notin \{x_2, x_3\} \\ x_3, \text{ dacă } x = x_2 \\ x_2, \text{ dacă } x = x_3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \notin \{x_1, x_2\} \\ x_2, \text{ dacă } x = x_1 \\ x_1, \text{ dacă } x = x_2. \end{cases}$$

Evident că aplicaţiile f şi g sînt bijective.

Avem: $g(f(x_3)) = g(x_2) = x_1$ şi $f(g(x_3)) = f(x_3) = x_2$. Aşadar, $g \circ f \neq f \circ g$.

1) În particular, dacă mulţimea E este finită, grupul transformărilor mulţimii E, devine grupul permutărilor asupra mulţimii E. Dacă mulţimea E are n elemente — putem considera $E = \{1, 2, \ldots n\}$ — atunci grupul permutărilor asupra mulţimii E, este un grup cu $n!$ elemente (există $n!$ permutări asupra mulţimii $E = \{1, 2, \ldots, n\}$). Grupul permutărilor asupra unei mulţimi cu n elemente se mai numeşte *grupul simetric de gradul n şi se notează cu* σ_n.

Pentru $n \geqslant 3$, acest grup este necomutativ.

De exemplu, grupul simetric de gradul 3 (grupul permutărilor asupra mulţimii $E = \{1, 2, 3\}$ este un grup necomutativ cu 6 elemente.

Se verifică fără dificultate că:

m) mulţimea vectorilor de poziţie formează grup comutativ faţă de adunare,

n) mulţimea translaţiilor formează grup comutativ faţă de compunere,

p) mulţimea rotaţiilor de acelaşi centru, formează grup comutativ faţă de compunere,

q) mulţimea matricelor pătrate de ordinul n formează grup comutativ faţă de adunare, dar nu formează grup faţă de înmulţire căci matricele singulare nu sînt inversabile (manualul de algebră pentru clasa a XI-a),

r) mulţimea claselor de resturi modulo n formează grup faţă de adunare, dar nu formează grup faţă de înmulţire, căci 0 este neinversabil.

5.2.4. **Consecințe imediate ale axiomelor grupului**

a) *Compusul a trei, patru, sau mai multe elemente este același, oricare ar fi modul de așezare a parantezelor* (consecință a axiomei (A), 5.1.16 — teorema de asociativitate).

b) *Într-un grup există un element neutru* (axioma (N)) *și numai unul* (5.1.22, unicitatea elementului neutru).

c) *Orice element admite un simetric și numai unul* (existența este dată de axioma (S), iar unicitatea este dată de axiomele (S) și (A); v. 5.1.25 — unicitatea elementului simetric).

d) *Într-un grup G a cărui lege este notată multiplicativ avem:* $(x^{-1})^{-1} = x$.

Într-adevăr, din $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ (axioma (S)) rezultă că inversul lui x^{-1} este x.

În cazul unui grup a cărui lege este notată aditiv avem $-(-x) = = x$.

5.2.5. **Elementul** x^n, **respectiv** $nx (x \in N)$, **operații cu elemente de această formulă.** Legea de compoziție a unui grup fiind asociativă, compusul a trei, patru sau mai multe elemente nu depinde de așezarea parantezelor (Teorema de asociativitate 5.1.16). Ne vom ocupa la acest punct de cazul particular, cînd se compune un element cu el însuși de mai multe ori, mai precis de elemente de forma $x \top x \top \top x \top \ldots \top x$.

Fie un grup G, a cărui lege este notată multiplicativ. Prin analogie cu notațiile folosite la numere, vom pune:

$$x^1 = x$$
$$x^2 = x \cdot x$$
$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$
$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$
$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x}_{n \text{ elemente}} \; (n \in N)$$

Elementul x^n va fi numit puterea a n-a a lui x.

Observări. 1) În cazul unei legi neasociative, notată multiplicativ, se poate defini ca mai sus puterea întîia și a doua. Începînd de la puterea a treia, este necesară o scriere cu paranteze. De obicei în acest caz se preferă o definiție de la „stînga la dreapta“:

$x^3 = (x \cdot x) \cdot x$ (primul x din stînga se compune cu al doilea și rezultatul cu al treilea)

$$x^4 = [(x \cdot x) \cdot x]x \text{ etc.}$$

Se observă că acceptînd această definiție, în general, în cazul unei legi neasociative avem $x^3 \neq x \cdot (x \cdot x)$, $x^4 \neq (x \cdot x) \cdot (x \cdot x)$, $x^4 \neq x \cdot [x(x \cdot x)]$ etc.

Dacă legea grupului G este notată aditiv, atunci prin analogie cu notațiile de la numere se pune:

$$1 \cdot x = x$$
$$2 \cdot x = x + x$$
$$3 \cdot x = x + x + x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n \cdot x = \underbrace{x + x + \dots\dots\dots + x}_{n \text{ elemente}} (x \in N).$$

Precizăm că, în general, scrierea nx nu reprezintă o înmulțire între n și x, ci numai o notație pentru elementul $\underbrace{x + x + \dots\dots + x}_{n \text{ elemente}}$ (De altfel, în general, $n \notin G$).

De exemplu, în grupul aditiv G al claselor de resturi modulo 3 avem:

$$5 \cdot \hat{2} = \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{1} \ (5 \notin G).$$

Avem:

(1) $$x^n x^m = x^{n+m}$$

(2) $$(x^n)^m = x^{nm}.$$

Într-adevăr,

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{m \text{ elemente}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n + m \text{ elemente}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ elemente}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \dots \cdot x)}_{n \text{ elemente}}}_{m \text{ paranteze}} =$$

$$= \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{mn \text{ elemente}} = x^{n \cdot m}.$$

Se observă că în demonstrația relațiilor (1) și (2) nu a intervenit decît axioma (A). Aceste egalități sînt deci adevărate, pentru orice lege asociativă notată multiplicativ.

În cazul cînd legea grupului este notată aditiv, relațiile (1) și (2) devin:

(1) $$nx + mx = (n + m)x,$$

(2) $$m(nx) = (mn)x.$$

2) Egalitatea $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, adevărată în cazul numerelor, nu este adevărată, în general, într-un grup necomutativ.

De exemplu, dacă considerăm grupul necomutativ al permutărilor asupra mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ şi notăm $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ şi $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Avem:

$$(f \circ g)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f^2 \circ g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ şi deci $(f \circ g)^2 \neq f^2 \circ g^2$.

5.2.6. Simetricul compusului a două sau mai multe elemente. Fie G un grup notat multiplicativ şi $x \in G$, $y \in G$.

Avem:

(1) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

Într-adevăr,

$(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (G fiind grup, x, respectiv y admite un simetric x^{-1}, respectiv y^{-1}).

$= x \cdot [(yy^{-1}) \cdot x^{-1}] =$ (teorema de asociativitate — 5.1.16).

$= x \cdot (ex^{-1}) =$

$= x \cdot x^{-1} = e$.

Aşadar, $(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) = e$. În mod analog, se arată că $(y^{-1}x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = e$. Ultimele două egalităţi arată că elementul $y^{-1} \cdot x^{-1}$ este simetricul elementului xy, adică

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

Se poate demonstra fără dificultate că

(2) $(x \cdot y \cdot z)^{-1} = z^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$,

. . . .

(3) $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_n^{-1} \ldots x_2^{-1} \cdot x_1^{-1}$.

În cazul cînd legea grupului este notată aditiv egalităţile (1), (2), (3) se transcriu astfel:

(1) $-(x + y) = (-y) + (-x)$,

(2) $-(x + y + z) = (-z) + (-y) + (-x)$,

(3) $-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (-x_n) + \ldots + (-x_2) + (-x_1)$,

În cazul cînd grupul G multiplicativ este comutativ, avem evident:

$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

$(x \cdot y \cdot z)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1}$,

$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{-1} = x_1^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{-1}$

5.2.7. Puteri cu exponent întreg într-un grup multiplicativ. Într-un grup G, notat multiplicativ, avem: $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$, $n \in N$. Redăm ideile demonstrației în cazul $n = 3$.

Avem:

$x^3 \cdot (x^{-1})^3 =$

$= (x \cdot x \cdot x) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}) =$

$= (x \cdot x) \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a folosit asociativitatea care permite să așezăm parantezele cum dorim.)

$= (x \cdot x)e(x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a ținut seama că $x \cdot x^{-1} = e$)

$= (x \cdot x) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1}) =$ (S-a ținut seama că e este element neutru.)

$= x \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot x^{-1} =$ (Se repetă procedeul anterior.)

$= x \cdot e \cdot x^{-1} = x \cdot x^{-1} = e$

Așadar, $x^3 \cdot (x^{-1})^3 = e$. În mod analog se demonstrează că $(x^{-1})^3 \cdot x^3 = e$. Deci, $x^3(x^{-1})^3 = (x^{-1})^3 \cdot x^3 = e$, egalitatea care dovedește că $(x^{-1})^3$ este inversul lui x^3, adică $(x^3)^{-1} = (x^{-1})^3$.

Relațiile (a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ $(n, m \in N)$, (b) $(x^n)^m = x^{nm}$ $(n, m \in N)$ și (c) $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$ $(n \in N)$ permit să generalizăm noțiunea de putere, de la puterea de exponent natural, la puterea de exponent întreg (într-un grup multiplicativ), procedînd asemănător cu cazul numerelor.

În acest scop, vom pune:

$x^0 = e$,

$x^{-n} = (x^{-1})^n$ sau $x^{-n} = (x^n)^{-1}$ $((x^{-1})^n = (x^n)^{-1})$, $n \in N$.

Egalitățile (a), (b), (c) rămîn adevărate și în cazul exponenților întregi. Așadar, avem

$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$,	$\alpha, \beta \in Z$	(a)
$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$,	$\alpha, \beta \in Z$	(b)
$(x^{-1})^\alpha = (x^\alpha)^{-1}$,	$\alpha \in Z$	(c)

Vom demonstra numai că egalitatea (a) este adevărată, celelalte le propunem ca exerciții.

Cazul 1. $\alpha = n$, $\beta = m, n, m \in N$.

Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^n \cdot x^m = x^{n+m} = x^{\alpha+\beta}$ (acest caz a fost studiat).

Cazul 2. $\alpha = 0$, $\beta = n$, $n \in N$

Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^0 \cdot x^n = e \cdot x^n = x^n = x^{0+n} = x^{\alpha+\beta}$.
În cazul $\alpha = n$, $\beta = 0$, $n \in N$ se procedează la fel ca în cazul 2.
Cazul 3. $\alpha = 0$, $\beta = -n$, $n \in N$.
Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^0 \cdot x^{-n} = e \cdot x^{-n} = x^{-n} = x^\beta = x^{0+\beta} = x^{\alpha+\beta}$.
În cazul $\alpha = -n$, $\beta = 0$, $n \in N$ se procedează la fel ca în cazul 3.
Cazul 4.

$$\alpha = -n, \ \beta = -m, \quad n, m \in N.$$

Avem: $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{-n} \cdot x^{-m} =$
$= (x^n)^{-1} \cdot (x^m)^{-1} =$ (S-a aplicat definiția puterii de exponent întreg negativ.)
$= (x^m \cdot x^n)^{-1} =$ (S-a folosit relația $a^{-1} \cdot b^{-1} = (b \cdot a)^{-1}$.)
$= (x^{m+n})^{-1} =$
$= (x^{n+m})^{-1} =$ (S-a ținut seama că adunarea numerelor naturale este comutativă.)
$= x^{-(n+m)} =$ (S-a ținut seama de definiția puterii de exponent întreg negativ.)
$= x^{(-n)+(-m)} = x^{\alpha+\beta}$.

Cazul 5. $\alpha = n$, $\beta = -m$, $n, m \in N$.
Dacă $n = m$, atunci
$x^\alpha \cdot x^\beta = x^n \cdot x^{-n} = x^0 = x^{\alpha+\beta}$ $(\alpha + \beta = n + (-n) = 0)$.
Dacă $n > m$, atunci $n = k + m$, unde $k \in N$, $(k = n - m)$ și avem
$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{k+m} \cdot x^{-m} = x^k \cdot x^m \cdot x^{-m} = x^k \cdot x^0 = x^k = x^{n-m} = x^{n+(-m)} = x^{\alpha+\beta}$.
Dacă $n < m$, atunci $m = n + k$, unde $k \in N$ $(k = m - n)$ și avem: $x^\alpha \cdot x^\beta =$
$= x^n \cdot x^{-n-k} = x^n \cdot x^{(-n)+(-k)} = x^n \cdot x^{-n} \cdot x^{-k} = e \cdot x^{-k} = x^{-k} = x^{n-m} = x^{\alpha+\beta}$.

5.2.8. Simplificarea la stînga și la dreapta. S-a văzut la capitolul „Legi de compoziție interne" că din $a = b$, rezultă $a \top x = b \top x (a = b \Rightarrow a \top x = b \top x)$, dar din $a \top x = b \top x$, nu rezultă în general, $a = b$. (Discuția analogă în cazul cînd se compune x la stînga.)

Vom arăta că într-un grup G are loc și implicația inversă:
$a \top x = b \top x \Rightarrow a = b.$ $(a, b, x \in G)$.
Într-adevăr,
$a \top x = b \top x \Rightarrow$
$\Rightarrow (a \top x) \top x' = (b \top x) \top x' \Rightarrow$ (Am compus ambii membri ai egalității cu x', simetricul lui x.)
$\Rightarrow a \top (x \top x') = b \top (x \top x') \Rightarrow$ (S-a folosit asociativitatea.)
$\Rightarrow a \top e = b \top e \Rightarrow$ (S-a folosit proprietatea $x \top x' = e$.)
$\Rightarrow a = b.$ (S-a ținut seama că e este elementul neutru.)

Așadar, $(a \top x = b \top x) \Rightarrow a = b$.

În mod analog, se demonstrează că $(x \top a = x \top b) \Rightarrow (a = b)$.
Deci, *dacă* a, b, x *sînt elemente ale unui grup a cărui lege de compoziție este notată cu semnul* $\top$, *avem:*

(1) $(a = b) \Leftrightarrow (a \top x = b \top x)$, *respectiv*
(2) $(a = b) \Leftrightarrow (x \top a = x \top b)$.

Relațiile (1) și (2), în cazul grupului aditiv, devin:

$(a = b) \Leftrightarrow (a + x = b + x)$
$(a = b) \Leftrightarrow (x + a = x + b)$.

În cazul grupului multiplicativ relațiile (1) și (2) devin:

$(a = b) \Leftrightarrow (a \cdot x = b \cdot x)$, respectiv
$(a = b) \Leftrightarrow (x \cdot a = x \cdot b)$.

5.2.9. **Ecuații într-un grup**. La acest punct ne vom referi la ecuațiile de forma $a \top x = b$, respectiv $x \top a = b$ (coeficienții a și b sînt elemente ale unui grup a cărui lege de compoziție este notată cu semnul $\top$, iar x este necunoscuta, element al aceluiași grup).

Avem:

$a \top x = b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a' \top (a \top x) = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a folosit relația 2 de la 5.2.8.)
$\Leftrightarrow (a' \top a) \top x = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a folosit asociativitatea.)
$\Leftrightarrow e \top x = a' \top b \Leftrightarrow$ (S-a ținut seama că $a' \top a = e$.)
$\Leftrightarrow x = a' \top b$. (S-a ținut seama că e este element neutru).

Așadar, ecuația $a \top x = b$ este echivalentă cu ecuația $x = a' \top b$. Altfel spus, *ecuația* $a \top x = b$ *are o singură soluție* $x = a' \top b$. În mod analog se arată că *ecuația* $x \top a = b$, *are o singură soluție* $x = b \top a'$. Ecuațiile $a \top x = b$ și $x \top a = b$ au în general soluții diferite. Dacă grupul este comutativ, cele două ecuații au aceeași soluție.

În cazul grupului aditiv afirmațiile anterioare se transcriu astfel:

Ecuația $a + x = b$ admite o singură soluție $x = (-a) + b$, iar ecuația $x + a = b$ are o singură soluție $x = b + (-a)$.

Dacă grupul este comutativ, atunci cele două ecuații au aceeași soluție $x = (-a) + b = b + (-a)$.

Această proprietate ne permite să introducem într-un grup aditiv comutativ o operație asemănătoare cu scăderea și notată cu semnul $-$, în felul următor: $b - a = b + (-a) = (-a) + b$. Altfel spus, $b - a$ reprezintă soluția ecuației $x + a = b$, respectiv $a + x = b$.

În cazul grupului multiplicativ afirmațiile privitoare la soluțiile ecuațiilor $a \top x = b$ și $x \top a = b$ se transcriu astfel:
Ecuația $a \cdot x = b$ admite o singură soluție $x = a^{-1} \cdot b$, iar ecuația $x \cdot a = b$ admite o singură soluție $x = b \cdot a^{-1}$.

Dacă grupul este comutativ, atunci cele două ecuații au aceeași soluție $x = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$. Această proprietate ne permite să introducem într-un grup multiplicativ comutativ o operație asemănătoare cu împărțirea notată cu semnul: sau linia de fracție, în felul următor:

$b : a = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$, sau folosind notația cu linia de fracție, $\frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$.

5.2.10. **Izomorfism. Omomorfism (de grup).** Există un număr foarte mare de exemple de grupuri. Aceste grupuri au multe trăsături comune, provenite din faptul că toate au aceeași structură (de grup), dar între ele există în general și unele deosebiri provenite din natura diferită a elementelor lor. Aceste deosebiri pot fi însă neesențiale.

Se consideră *identice* din punct de vedere algebric două grupuri, de natură diferită, atunci cînd elementele lor se pot asocia două cîte două, astfel încît orice „relație algebrică" între elementele primului grup să fie adevărată simultan cu relația obținută înlocuind elementele primului grup cu cele asociate din grupul al doilea.

Exemplu. Fie grupul G al claselor de resturi modulo 4 și grupul G' definit de înmulțire pe mulțimea $\{1, i, -1, -i\}$. (Se verifică fără dificultate că mulțimea $\{1, i, -1, i\}$ înzestrată cu operația de înmulțire este grup.)

Tabelele legilor de compoziţie sînt următoarele:

pentru G

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

pentru G'

$\bullet$	1	i	-1	$-$i
1	1	i	-1	$-$i
i	i	-1	$-$i	1
-1	-1	$-$i	1	i
$-$i	$-$i	1	i	-1

Asociem elementele celor două grupuri în felul următor: $\hat{0}$ cu 1, $\hat{1}$ cu i, $\hat{2}$ cu -1, $\hat{3}$ cu $-$i. Să notăm elementele asociate cu acelaşi semn. În felul următor:

$\hat{0}$, respectiv 1, cu a

$\hat{1}$, respectiv i, cu b

$\hat{2}$, respectiv -1, cu c

$\hat{3}$, respectiv $-$i, cu d.

Tabelele celor două grupuri devin:

pentru G

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

pentru G'

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Se constată că deşi grupurile sînt formate din obiecte diferite, de data aceasta notate la fel, se obţine acelaşi tabel. Deci orice

relație între elementele primului grup — definită cu ajutorul tabelului respectiv — este adevărată simultan cu relația corespunzătoare între elementele din grupul al doilea — definită cu ajutorul tabelului respectiv, căci cele două tabele sînt identice.

Se spune în acest caz că cele două grupuri sînt *izomorfe* şi se consideră identice din punct de vedere algebric.

Să analizăm procedeul prin care am identificat cele două grupuri.

a) Întîi s-a asociat oricărui element din primul grup, un element şi numai unul din al doilea grup astfel încît orice element din al doilea grup să fie asociat cu unul şi numai unul din primul grup.

Cu alte cuvinte s-a găsit o funcție $f : G \to G'$, bijectivă, care este definită astfel: $f(\hat{0}) = 1$, $f(\hat{1}) = \mathrm{i}$; $f(\hat{2}) = -1$, $f(\hat{3}) = -\mathrm{i}$.

b) S-au notat elementele care se corespund prin f cu aceleaşi semne şi s-au obținut tabelele identice. Să vedem ce proprietate trebuie să aibă funcția f, pentru a fi posibil acest lucru.

Să presupunem că legea grupului G este notată cu semnul $\top$, iar legea grupului G' este notată cu semnul $\perp$. Să considerăm $x \in G$, $y \in G$. Fie $z = x \top y$. Elementelor x, y, z le corespund prin f, elementele $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$. Elementele care se corespund să le notăm cu aceleaşi semne, astfel:

$$x,\ f(x) \text{ cu } a,$$

$$y,\ f(y) \text{ cu } b,$$

$$z,\ f(z) \text{ cu } c.$$

Elementul $f(x) \perp f(y)$ îl notăm cu d.

Reținînd din tabelul grupului G linia elementului x şi coloana elementului y, avem pentru G:

$$\begin{array}{c|c} \top & y \\ \hline & \vdots \\ x & \ldots\ldots z = x \top y \end{array}, \quad \text{respectiv} \quad \begin{array}{c|r} \top & b \\ \hline & \vdots \\ a & \ldots\ldots c \end{array}$$

În G' avem:

$$\begin{array}{c|c} \perp & f(y) \\ \hline & \vdots \\ f(x) & \ldots\ldots f(x) \perp f(y) \end{array}, \quad \text{respectiv} \quad \begin{array}{c|r} \perp & b \\ \hline & \\ a & d \end{array}$$

Tabelul

$\top$	b
a	c

trebuie să fie identic

cu tabelul

$\perp$	b
a	d

Așadar, c trebuie să fie identic cu d. Dar în G', c reprezintă pe $f(z)$, iar d pe $f(x) \perp f(y)$. Deci trebuie să avem

$$f(z) = f(x) \perp f(y), \text{ adică } f(x \top y) = f(x) \perp f(y).$$

Așadar funcția $f : G \to G'$ este caracterizată de următoarele proprietăți:

a) este bijectivă

b) $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

DEFINIȚIE. Fie G un grup a cărui lege este notată cu $\top$ și G' un grup a cărui lege este notată cu $\perp$. O aplicație $f: G \to G'$ se numește izomorfism dacă:

a) este bijectivă

b) $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

Dacă între grupurile G și G' există un izomorfism, atunci se spune că cele două grupuri sînt izomorfe, și se consideră identice din punct de vedere algebric.

O aplicație $f : G \to G'$ se numește omomorfism, dacă este îndeplinită numai condiția (b).

Noțiunea de omomorfism joacă un rol foarte important în studiul structurilor algebrice. Limitele materiei conținute în acest manual nu ne permit, însă, să punem în evidență importanța acestei noțiuni.

Dacă legile grupurilor G și G' sînt notate ambele multiplicativ, respectiv aditiv, atunci egalitatea (b) devine:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \text{ respectiv } f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Dacă legea grupului G este notată aditiv, iar legea grupului G' este notată multiplicativ, atunci relaţia (b) devine:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Dacă legea grupului G este notată multiplicativ, iar legea grupului G' este notată aditiv, relaţia (b) devine:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Un izomorfism $f : G \to G$ se numeşte un automorfism.

Un exemplu de automorfism este aplicaţia identică.

Exemplu: *Grupul aditiv al numerelor reale este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.*

Într-adevăr funcţia exponenţială ($f : R \to R_+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$) este un izomorfism, căci $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$.

TEOREMĂ. Fie G şi G' două grupuri a căror lege este notată multiplicativ, avînd element neutru pe e, respectiv e'.
Dacă $f: G \to G'$ este un izomorfism, atunci:

(1) $f(e) = e'$ (imaginea elementului neutru din primul grup este element neutru, în cel de-al doilea grup).

(2) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ (imaginea simetricului lui x, este simetricul imaginii lui x.

Demonstraţie

(1) Fie $x' \in G'$. Aplicaţia f, fiind surjectivă există $x \in G$, astfel încît $f(x) = x'$.

Avem $x' \cdot f(e) = f(x) \cdot f(e) = f(x \cdot e) = f(x) = x'$.

Analog se arată că $f(e) \cdot x' = x'$ şi deci $f(e)$ este element neutru.

Demonstraţia egalităţii (2) o propunem ca exerciţiu.

INELE

5.2.11. Adunarea şi înmulţirea determină pe mulţimea Z a numerelor întregi, o structură algebrică caracterizată de următoarele proprietăţi:

a) Adunarea determină pe Z o structură de grup comutativ.
b) Înmulţirea este asociativă şi comutativă.
c) Există element neutru faţă de înmulţire (numărul 1).
d) Înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Există exemple de mulţimi înzestrate cu două legi de compoziţie (adunarea şi înmulţirea) astfel încît, înmulţirea nu este comutativă (mulţimea matricelor pătrate de ordinul n) sau nu există element unitate (mulţimea numerelor pare), cele două legi de compoziţie avînd celelalte proprietăţi menţionate în cazul numerelor întregi.

DEFINIŢIE. Două legi de compoziţie, prima notată aditiv şi a doua multiplicativ, definesc pe o mulţime I o structură de inel dacă:

Grup aditiv comutativ:

A_p **Adunarea este peste tot definită.**

A_A **Adunarea este asociativă, adică,** $(x+y)+z=$ $=x+(y+z)$, **oricare ar fi,** $x, y, z \in I$.

A_c **Adunarea este comutativă, adică** $x+y=$ $=y+x$, **oricare ar fi** $x, y \in I$.

A_N **Există** $0 \in I$, **astfel încît** $0+x=x$, **oricare ar fi** $x \in I$.

A_s **Oricărui element** $x \in I$, **i se poate asocia un element** $-x \in I$, **astfel încît** $x+(-x)=0$.

M_p **Înmulţirea este peste tot definită.**

M_A **Înmulţirea este asociativă, adică** $x \cdot (y \cdot z)=$ $=(x \cdot y) \cdot z$, **oricare ar fi** $x, y, z \in I$.

D_{MA} **Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică, oricare ar fi** $x, y, z \in I$, **avem:**

$$x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z),$$
$$(y+z) \cdot x=(y \cdot x)+(z \cdot x).$$

Dacă înmulţirea este comutativă se spune că inelul este *comutativ*. Dacă există element neutru faţă de înmulţire se spune că inelul este *cu element unitate*.

5.2.12. **Exemple.** a) *Inele numerice*

Adunarea și înmulțirea determină pe următoarele mulțimi de numere o structură de inel:

1) mulțimea Z a numerelor întregi (inelul numerelor întregi, inel comutativ cu element unitate),

2) mulțimea numerelor întregi pare (inel comutativ, fără element unitate),

3) mulțimea Q respectiv R, C a numerelor raționale respectiv reale, complexe (inele comutative cu element unitate).

b) *Mulțimea matricelor pătrate de ordinul n* (inel necomutativ, cu element unitate).

c) *Clase de resturi.* Adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural n o structură de inel comutativ, cu element unitate.

5.2.13. **Înmulțirea cu 0. Divizori ai lui 0**

Într-un inel I, dacă cel puțin unul din factorii unui produs este 0, atunci produsul este egal cu 0, adică

$$a \cdot 0 = 0, \text{ respectiv } 0 \cdot a = 0 \qquad (a \in I).$$

Într-adevăr, avem:

$a(0 + 0) = a \cdot 0$ (căci $0 + 0 = 0$) și $a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (distributivitatea) și deci $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Notînd $a \cdot 0$ cu x, avem $x = x + x$ și adunînd, la stînga pe $-x$, obținem $(-x) + x = (-x) + (x + x)$, de unde $0 = x$, adică $a \cdot 0 = 0$. Egalitatea $0 \cdot a = 0$ se demonstrează la fel.

Reciproca afirmației demonstrate nu este adevărată în orice inel, mai precis, *există inele în care produsul a două (sau mai multe elemente) este egal cu 0, fără ca nici unul din factori să fie 0.*

Exemple. 1) În inelul claselor de resturi modulo 12, avem:

$$\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$$

$$\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{0} \qquad (\hat{3} \neq \hat{0},\ \hat{4} \neq \hat{0})$$

Un element $d \neq 0$ al unui inel I se numește divizor al lui 0, dacă există un element $d' \neq 0$ astfel încît:

$$d \cdot d' = 0 \text{ sau } d' \cdot d = 0.$$

În inelul claselor de resturi modulo 12 elementele $\hat{3}$ și $\hat{4}$ sînt divizori ai lui $\hat{0}$.

Orice inel numeric (față de adunarea și înmulțirea curentă) nu are divizor al lui 0. Într-adevăr, în cazul numerelor, dacă un produs este egal cu 0, atunci cel puțin unul din factori este egal cu 0.

2) Inelul matricelor pătrate de ordinul $n(n \geqslant 2)$ are divizori ai lui 0. Verificăm afirmația în cazul matricelor pătrate de ordinul 2. Fie $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ două matrici de ordinul 2 nenule.

Se verifică, fără dificultate, că $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

5.2.14. **Regula semnelor într-un inel.** În cazul numerelor, regula semnelor la înmulțire se reduce la următoarele relații:

a) $$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b),$$

b) $$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Vom arăta acum că aceste egalități sînt adevărate în orice inel. Avem:

$[a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0$ (Înmulțirea cu 0; 5.2.13.)

Aplicînd distributivitatea avem:

$$[a + (-a)] \cdot b = (a \cdot b) + (-a) \cdot b.$$ Deci,

$(a \cdot b) + (-a) \cdot b = 0$ și adunînd la stînga pe $-(a \cdot b)$ obținem: $-(a \cdot b) + [(a \cdot b) + (-a) \cdot b] = -(ab)$, de unde

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b).$$

În mod analog se verifică egalitatea $a(-b) = -(a \cdot b)$.

Pentru a verifica egalitatea (b) punem $-b = x$.

Avem: $(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot x = -(a \cdot x) = -[a(-b)] =$
$$= -[-(a \cdot b)] = a \cdot b.$$

Dacă inelul este cu element unitate, atunci $(-1)x = -x$. Într-adevăr $(-1)x = -(1 \cdot x) = -x$.

5.2.15. **Simplificarea la stînga și la dreapta într-un inel fără divizori ai lui 0.** Fie un inel I fără divizori ai lui 0, $a \in I$, $x \in I$, $y \in I$ și $a \neq 0$. Din egalitatea $ax = ay$ rezultă $x = y$. (Se spune în acest caz că egalitatea $ax = ay$ se poate simplifica la stînga, cu $a \neq 0$.)

Într-adevăr, din $ax = ay$, rezultă prin adunare la dreapta a elementului $-ay$:

$ax + (-ay) = (ay) + (-(ay)) = 0$. Cum $-(ay) = a(-y)$, avem: $ax + a \cdot (-y) = a \cdot (x + (-y)) = 0$. Inelul I, fiind fără divizori ai lui 0 şi $a \neq 0$, rezultă $x + (-y) = 0$, de unde, adunînd la dreapta elementul y, obţinem $x = y$.

În mod analog, se poate arăta că

$(xa = ya$ şi $a \neq 0) \Rightarrow x = y$. (Se spune în acest caz că egalitatea $xa = ya$ se poate simplifica la dreapta cu a).

5.2.15. **Reguli de calcul într-un inel.** *Reguli care rezultă din proprietatea unui inel de a fi grup comutativ faţă de adunare.*

Un inel I fiind grup comutativ faţă de adunare, avem:

$-(-x) = x$ (1), $x \in I$(5.2.4. (d))

$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (-x_1) + (-x_2) \ldots + (-x_n)$(2), $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ (5.2.6).

Pentru simplificarea scrierii se face convenţia să se scrie $x - y$ în loc de $x + (-y)$, $-x + y$ în loc de $(-x) + y$, $-x - y$ în loc de $(-x) + (-y)$. Cu această convenţie, relaţia (2) devine

$$-(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -x_1 - x_2 - x_3 \ldots - x_n.$$

În cazul numerelor reale regăsim regula prin care se afirmă că „minus în faţa unei paranteze schimbă semnul tuturor termenilor". Această regulă, foarte frecvent utilizată în algebra elementară, rezultă, aşadar, din proprietatea mulţimii numerelor reale de a fi grup comutativ faţă de adunare. Iată şi alte situaţii uzuale, din algebra elementară, care se justifică prin proprietatea numerelor reale de a forma grup comutativ faţă de adunare.

$$a - (b - c) = a - b - (-c) = a - b + c$$

$$a - (b - c - d) = a - b - (-c) - (-d) = a - b + c + d \quad \text{etc.}$$

Înmulţirea unei sume cu o altă sumă.

Toate elementele care intervin în relaţiile ce urmează se presupun dintr-un inel I.

Avem:

$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n \qquad (1)$$

respectiv $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)a = x_1 \cdot a + x_2 \cdot a + \ldots + x_n a.$ (1')

Într-adevăr, dacă facem notaţiile: $x_2 + \ldots + x_n = y_1$, $x_3 + x_4 + \ldots + x_n = y_2$, $\ldots, x_{n-1} + x_n = y_{n-1}$, atunci, aplicînd distributivitatea, obţinem succesiv:

$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a(x_1 + y_1) =$$
$$= ax_1 + ay_1 = ax_1 + a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= ax_1 + a(x_2 + y_3) = ax_1 + ax_2 + ay_3 = \ldots =$$

$= ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n$. În mod analog se verifică egalitatea

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)a = x_1 \cdot a + x_2 a + \ldots + x_n a.$$

Avem:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= a_1x_1 + a_2x_1 + \ldots + a_mx_1 +$$
$$a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1x_n + a_2x_n + \ldots + a_mx_n.$$

Această relație se poate scrie cu ajutorul simbolului Σ astfel

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{m} a_h x_l\right).$$

Pentru demonstrație, să punem $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = a$.

Avem:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x_1 +$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\, x_n =$$
$$= a_1x_1 + a_2x_1 + \ldots + a_mx_1 +$$
$$+ a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_2 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_1x_n + a_2x_n + \ldots + a_mx_n.$$

Dăm acum cîteva situații uzuale, în algebra elementară, în care regulile de calcul (cu numere reale) se justifică prin proprietățile menționate:

$$(a + b)(x + y + z) = ax + bx + ay + by + az + bz$$
$$(a - b)(x - y + z - t) = ax + (-b)x + a(-y) + (-b)\cdot(-y) +$$
$$+ az + (-b)z + a(-t) + (-b)\cdot(-t) =$$
$$= ax - bx - ay + by + az - bz - at + bt.$$

Calculul cu polinoame, avînd coeficienți într-un inel comutativ.

Înmulțirea fiind asociativă, într-un inel sînt adevărate egalitățile: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ și $(x^n)^m = x^{nm}$ (5.2.5).

Fie a_0, a_1, b_0, b_1 și x, elemente dintr-un inel I.

Avem:

$$(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) = a_0xb_0x + a_1b_0x + a_0xb_1 + a_1b_1.$$

Se observă că dacă înmulțirea nu este comutativă, atunci scrierea rezultatului, ca o sumă de termeni, după puterile descrescătoare ale lui x, nu este posibilă. Dacă înmulțirea este comutativă, atunci avem:

$$(a_0x + a_1)(b_0x + b_1) = a_0b_0xx + a_1b_0x + a_0b_1x + a_1b_1 =$$
$$= a_0b_0x^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_1b_1.$$

Regulile de calcul folosite la calculul produselor de polinoame cu coeficienți din mulțimea numerelor reale (sau complexe) se justifică prin aceea că mulțimea numerelor reale (respectiv, mulțimea numerelor complexe) formează inel comutativ.

Dăm acum cîteva situații uzuale din calculul cu polinoame care se justifică, pe baza regulilor de calcul într-un inel comutativ.

(1) $$(a_0x^2 + a_1x + a_2)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) = $$
$$= a_0b_0x^5 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^3 +$$
$$+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^2 + (a_1b_3 + a_2b_2)x + a_2b_3$$

(2) $$(ax^2 - b)(cx^2 - d) = acx^4 - (bc + ad)x^2 + bd.$$

5.2.17. **Inele pe polinoame cu coeficienţi numerici.** Fie $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi, respectiv raţionali, reali, complecşi.

În aceste mulţimi adunarea şi înmulţirea determină o structură de inel comutativ, cu element unitate şi fără divizori ai lui 0 căci:

A_P. Suma a două polinoame cu coeficienţi întregi, respectiv raţionali, reali sau complecşi, este un polinom cu coeficienţi întregi respectiv raţionali, reali sau complecşi.

A_A. Adunarea polinoamelor este asociativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$ şi $R(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$ sau $C[x]$, avem

$$[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)].$$

A_C. Adunarea este comutativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$ şi $Q(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$ sau $C[x]$ avem:

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x).$$

A_N. În $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ există element neutru faţă de adunare. Acesta este polinomul nul P^* ($P^*(x) = 0$):

$$P(x) + P^* = P(x).$$

A_S. Oricare polinom $P(x)$ cu coeficienţi întregi respectiv raţionali, reali, complecşi, admite un opus, polinomul $-P(x)$ care este un polinom cu coeficienţi întregi, respectiv raţionali, reali, complecşi. Avem:

$$P(x) + (-P(x)) = P^*.$$

Aşadar, adunarea determină pe $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ o structură de grup comutativ.

M_P. Produsul a două polinoame din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ este un polinom din $Z[x]$ respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$.

M_A. Înmulţirea este asociativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ avem:

$$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)].$$

Înmulţirea este comutativă, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$ şi $Q(x)$ din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ avem:

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x).$$

În $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$, polinomul identificat cu numărul 1 este element unitate față de înmulțire, căci $P(x) \cdot 1 = P(x)$, oricare ar fi $P(x)$.

D_{MA}. Înmulțirea este distributivă față de adunare, căci oricare ar fi polinoamele $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, din $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$, avem:

$$P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x).$$

Proprietățile enumerate, arată că, adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ o structură de inel comutativ cu element unitate.

Să demonstrăm acum că în $Z[x]$, respectiv $Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ nu există divizori ai lui 0.

Fie două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ diferite de polinomul nul. În acest caz cele două polinoame pot fi scrise sub forma $P(x) = a_0x^n + ... + a_n$, cu $a_0 \neq 0$ și $Q(x) = b_0x^m + ... + b_m$, cu $b_0 \neq 0$.

Avem:

$P(x) \cdot Q(x) = a_0b_0x^{n+m} + ... + a_nb_m$ și cum în Z, respectiv Q, R, C nu avem divizori ai lui 0, rezultă $a_0b_0 \neq 0$ și deci polinomul $P(x) \cdot Q(x)$ nu poate fi polinomul nul.

Consecință. Dacă $P(x) \neq P^*$, atunci:

$P(x) \cdot Q(x) = P(x) \cdot R(x) \Rightarrow Q(x) = R(x)$ (v. 5.2.15).

Observare. Faptul că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi, respectiv raționali, reali, complecși, o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0, rezultă din proprietatea mulțimii din care se consideră coeficienții de a forma inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0, căci operațiile cu polinoame se reduc la operații cu coeficienții acestora.

5.2.18. **Izomorfism. Omomorfism (de inel).** Motive analoge cu cele expuse la 5.2.10 au dus la necesitatea găsirii unor criterii după care să se identifice, din punct de vedere algebric, două inele.

DEFINIȚIE. Fie I și I' două inele. O aplicație $f: I \to I'$ se numește izomorfism dacă:

a) f este bijectivă,

b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

c) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Dacă între inelele I și I' există un izomorfism, atunci se spune că acestea sînt izomorfe și se consideră identice, din punct de vedere algebric.

O aplicaţie $f : I \to I'$, se numeşte omomorfism dacă îndeplineşte condiţiile (b) *şi* (c).

Exemple de inele izomorfe vor fi date la exerciţii.

Din definiţia izomorfismului, rezultă imediat următoarele consecinţe:

(1) $f(0) = 0$.

(2) *Dacă inelul I admite ca element unitate pe 1, atunci $f(1)$ este element unitate în I'.*

(3) *Dacă inelul I este comutativ, atunci şi inelul I' este comutativ.*

(4) $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$.

În particular, $f(nx) = nf(x)$.

(5) $f(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$.

În particular, $f(x^n) = f(x)^n$.

Demonstraţiile propoziţiilor (2), (3), (4), (5) le propunem ca exerciţii.

CORPURI

5.2.19. S-a văzut că adunarea şi înmulţirea definesc pe mulţimea numerelor raţionale o structură de inel, cu element unitate.

În inelul numerelor raţionale, orice element diferit de 0 este inversabil. $\left(\text{Inversul numărului raţional } x = \frac{a}{b} \text{ este numărul raţional } x^{-1} = \frac{b}{a};\ x \cdot x^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.\right)$

Această proprietate nu are loc în inelul numerelor întregi (în inelul numerelor întregi singurele elemente inversabile sînt 1 şi -1).

Observaţii: 1) Dacă într-un inel cu element unitate, avem $0 = 1$, atunci $E = \{0\}$. Într-adevăr, fie $x \in E$. Avem:

$x \cdot 1 = x$ (1 fiind element unitate).

$x \cdot 0 = 0$ (înmulţirea cu 0 într-un inel).

Dar $1 = 0$ şi deci $x \cdot 1 = x \cdot 0$ de unde $x = 0$.

2) Într-un inel cu element unitate, dacă $E \neq \{0\}$, atunci 0 nu este inversabil.

Într-adevăr, să presupunem, contrariul, că 0 este inversabil şi să notăm cu 0^{-1} inversul lui 0.

Avem: $0 \cdot 0^{-1} = 1$ şi

$0 \cdot 0^{-1} = 0$ (înmulţirea cu 0 într-un inel).

Aşadar, $0 = 1$, şi deci $E = \{0\}$ (observaţia 1) ceea ce contrazice ipoteza $E \neq \{0\}$.

DEFINIŢIE. Două legi de compoziţie, prima notată aditiv iar a doua notată multiplicativ, determină pe o mulţime K o structură de corp dacă:

Inel cu element unitate

Grup aditiv comutativ

- A_p. **Adunarea este peste tot definită.**
- A_A. **Adunarea este asociativă, adică:** $(x + y) + z = x + (y + z)$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.
- A_C. **Adunarea este comutativă, adică** $x + y = y + x$, **oricare ar fi** $x, y \in K$
- A_N. **Există** $0 \in K$, **astfel încît:** $0 + x = x$ (**respectiv** $x + 0 = x$), **pentru orice** $x \in K$.
- A_S. **Pentru orice** $x \in K$, **există** $-x \in K$, **astfel încît** $x + (-x) = 0$ (**respectiv** $-x + x = 0$).
- M_P. **Înmulţirea este peste tot definită.**
- M_A. **Înmulţirea este asociativă, adică** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.
- M_N. **Există** $1 \in K$, **astfel încît:** $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, **oricare ar fi** $x \in K$.
- D_{MA}. **Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică:**

$$x \cdot (y + z) = xy + xz$$

$(y + z) \cdot x = yx + zx$, **oricare ar fi** $x, y, z \in K$.

- M_S. **Pentru orice** $x \neq 0$, **din** K **există** $x^{-1} \in K$ **astfel încît:** $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

— **Dacă înmulţirea este comutativă, adică** $x \cdot y = y \cdot x$, **oricare ar fi** $x, y \in K$, **corpul se numeşte** ***comutativ.***

Observare. Se admite că un corp conţine cel puţin două elemente (distincte): 0 şi 1.

5.2.20. **Exemple.** 1. Adunarea și înmulțirea definesc o structură de corp pe următoarele mulțimi:

a) Mulțimea numerelor raționale Q *(corpul numerelor raționale.* Acest corp este comutativ).

b) Mulțimea numerelor reale *(corpul numerelor reale.* Acest corp este comutativ).

c) Mulțimea numerelor complexe (corpul numerelor complexe. Acest corp este comutativ). Într-adevăr, se știe că adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea numerelor complexe o structură algebrică de inel cu element unitate.

Dacă $z = a + bi$ ($z \in C$ și $z \neq 0$), atunci $z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}$ i și $z \cdot z^{-1} = 1$.

2) Adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea claselor de resturi modulo un număr natural p prim, o structură de corp, corpul claselor de resturi modulo p. Într-adevăr, adunarea și înmulțirea definesc pe mulțimea claselor de resturi, modulo un număr natural o structură de inel cu element unitate. Dacă se consideră clasele de resturi modulo un număr natural prim, atunci orice element diferit de 0 este inversabil.

Corpul claselor de resturi modulo p este un corp comutativ.*

5.2.21. **Lipsa divizorilor lui 0.** Corpul fiind o structură algebrică particulară de inel, într-un corp au loc toate proprietățile care au loc într-un inel.

Într-un corp K nu există divizori ai lui 0

Altfel spus, *produsul a două elemente dintr-un corp, diferite de* 0, *este un element diferit de* 0.

Într-adevăr, să presupunem contrariul, că într-un corp există două elemente $a \neq 0$ și $b \neq 0$ astfel încît $a \cdot b = 0$.

Avem:

$$a \cdot b = 0.$$

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$ (S-a înmulțit la stînga cu a^{-1}. Elementul a fiind diferit de 0 este inversabil.)

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0$ (S-a folosit asociativitatea înmulțirii.)

* Se poate demonstra că orice corp finit (un corp definit pe o mulțime finită) este comutativ (Teorema lui Wedderburn).

$1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0$ (S-a utilizat relația $a^{-1} \cdot a = 1$.)

$b = a^{-1} \cdot 0$ (S-a folosit faptul că 1 este element unitate.)

$b = 0$ (Înmulțirea cu 0 într-un inel.)

Egalitatea $b = 0$ contrazice ipoteza $b \neq 0$.

Așadar, un produs de elemente dintr-un corp este 0, dacă și numai dacă cel puțin un factor este $0 : (a \cdot b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ sau } b = 0)$.

Un inel în care există divizori ai lui 0, nu este corp.

5.2.22. **Altă definiție a corpului.** Dacă adunarea și înmulțirea definesc pe o mulțime K o structură de corp, atunci înmulțirea definește pe mulțimea $K \setminus \{0\}$ o structură de grup multiplicativ.

Într-adevăr,

P_M. Înmulțirea este peste tot definită în mulțimea $K \setminus \{0\}$. (Produsul a două elemente diferite de 0 este un element diferit de 0.)

P_A. Înmulțirea este asociativă.

P_N. Există element unitate.

P_S. Orice element diferit de 0 (din $K \setminus \{0\}$) este inversabil.

Cu această observație, putem formula definiția corpului și astfel:

Două legi de compoziție, una notată aditiv și alta notată multiplicativ, determină pe o mulțime K o structură de corp, dacă:

a) Adunarea determină pe K o structură de grup comutativ;

b) Înmulțirea determină pe $K \setminus \{0\}$ o structură de grup;

c) Înmulțirea este distributivă față de adunare.

5.2.23. **Fracții într-un corp comutativ.** Dacă într-un corp comutativ, facem notația $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, respectiv $\frac{a}{b} = b^{-1} \cdot a$ $(b \neq 0)$ (aceste notații sînt sugerate de cele folosite la numere, unde $a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$) atunci putem efectua, cu elementele sale calcule analoge cu cele de la fracții.

Avem:

$$a = \frac{a}{1} \quad \text{(a)}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{(b)}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{(c)}$$

În particular, $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \qquad \text{(d)}$$

În particular $\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{c}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}, \quad \alpha \in Z \qquad \text{(e)}$$

Demonstrăm numai relațiile (a) și (b).

a) Avem: $\frac{a}{1} = a \cdot (1)^{-1} = a \cdot 1 = a$.

b) Avem:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a, \quad \frac{c}{d} = c \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot c,$$

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} =$$

$= (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) =$ (S-a folosit relația $(b \cdot d)^{-1} = d^{-1} \cdot b^{-1}$)

$= (a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) + (b \cdot c) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) =$ (S-a folosit distributivitatea.)

$= a \cdot d \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} + b \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} =$ (S-a ținut seama că înmulțirea este asociativă și comutativă.)

$= a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ (S-au folosit relațiile $d \cdot d^{-1} = 1$ și $b \cdot b^{-1} = 1$ și s-a utilizat proprietatea elementului neutru.)

5.2.24. **Izomorfism. Omomorfism (de corp).**

DEFINIŢIE. Fie K şi K' două corpuri. O aplicaţie $f: K \to K'$ se numeşte izomorfism, dacă:

a) f este bijectivă,

b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

c) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Dacă între corpurile K şi K' există un izomorfism, atunci se spune că cele două corpuri sînt izomorfe şi se consideră identice din punct de vedere algebric.

O aplicaţie $f: K \to K'$, se numeşte omomorfism dacă îndeplineşte condiţiile b) şi c).

Exemple de corpuri izomorfe, vor fi date la exerciţii.

Un izomorfism $f: K \to K$ se numeşte automorfism.

EXERCIŢII

EXEMPLE DE LEGI DE COMPOZIŢIE

1. Fie mulţimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Notăm cu $x \top y$, cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y $(x \in E,\ y \in E)$.

a) Corespondenţa $(x, y) \to x \top y$ defineşte o lege de compoziţie în E.

Să se întocmească tabelul legii de compoziţie. Este această lege peste tot definită?

b) Să se verifice că: $(2 \top 3) \top 6 = 2 \top (3 \top 6)$.

c) Să se calculeze: $[(4 \top 6) \top 4] \top (4 \top 2)$.

d) Să se rezolve ecuaţiile: $x \top 6 = 2$, $x \top 3 = 3$, $x \top 5 = 5$.

2. Fie mulţimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\ 6, 7, 8\}$. Notăm cu $x \top y$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y $(x \in E,\ y \in E)$.

a) Corespondenţa $(x, y) \to x \top y$ defineşte o lege de compoziţie în E. Să se întocmească tabelul legii de compoziţie. Este această lege peste tot definită?

3. Fie mulţimea $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi $x \top y = |x - y|$ $(x \in E,\ y \in E)$.

a) Să se întocmească tabelul legii de compoziţie. Este această lege de compoziţie peste tot definită?

b) Este adevărată afirmaţia: „$(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ oricare ar fi x, y, z din E"?

c) Este adevărată afirmaţia: „$x \top y = y \top x$, oricare ar fi x, y din E"?

d) Să se rezolve ecuaţia $(x \top 2) \top 3 = 1$.

• **4.** Fie mulţimea $E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right\} = \left\{x \in R \middle| \ x = \frac{1}{2^n}, \ n \in N\right\}$.

a) Este înmulţirea peste tot definită în E?

b) Este adunarea peste tot definită în E?

• **5.** Să se precizeze dacă adunarea, respectiv scăderea este sau nu este peste tot definită în următoarele mulţimi: N, Z, Q, R, C, Q_+, R_+, $Z \setminus \{0\}$, $Q / \{0\}$, $R \setminus \{0\}$, $C \setminus \{0\}$.

• **6.** Să se precizeze dacă înmulţirea, respectiv împărţirea, este sau nu peste tot definită în următoarele mulţimi: N, Z, Q, R, C, Q_+, R_+, $Z \setminus \{0\}$, $Q \setminus \{0\}$, $R \setminus \{0\}$, $C \setminus \{0\}$.

7. Fie M mulţimea permutărilor asupra mulţimii $\{1, 2, 3\ 4\}$.

a) Să se rezolve ecuaţiile:

$$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X \in M.$$

b) Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad Y \in M.$$

• **8.** a) Să se întocmească tabelele adunării şi înmulţirii în mulţimea claselor de resturi modulo 7.

b) Să se rezolve ecuaţiile

$$1) \quad x + \hat{3} = \hat{0} \qquad\qquad 2) \quad \hat{3} \cdot x = \hat{1}.$$

c) Să se verifice, că dacă $x \neq \hat{0}$ egalitatea $x^7 = x$ este o identitate.

• **9.** În mulţimea R a numerelor reale fie $x \top y = x + y + 5$ şi $x \perp y = x^2 + y^2$.

a) Să se calculeze $3 \top 5$ şi $2 \perp 4$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x \top y = 8 \\ (x \perp 3) \top (y \perp 2) = 23. \end{cases}$$

• **10.** Fie M mulţimea matricelor pătrate de ordinul doi de forma $\begin{Vmatrix} x & y \\ 2y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$. Să se arate că înmulţirea este peste tot definită în M. Adunarea este peste tot definită în M?

• **11.** Fie $M = \{x \in R | x = a + b\sqrt{5},\ a \in Q,\ b \in Q,\ a^2 - 5b^2 = 1\}$.
Să se arate că înmulţirea în M este peste tot definită.

12. Fie în mulţimea $[3, +\infty)$ legea de compoziţie $x \top y = xy - 3(x + y) + 12$. Să se arate că legea $\top$ este peste tot definită.

13. Fie F_c mulţimea funcţiilor strict crescătoare definite pe R cu valori în R.

a) Să se arate că adunarea este peste tot definită în F_c.

b) Înmulţirea este peste tot definită în F_c?

ASOCIATIVITATE

• **14.** Se ştie că în cazul unei legi de compoziţie asociative compusul a patru, cinci sau mai multe elemente nu depinde de aşezarea parantezelor (5.1.16).

Să se verifice că în cazul unei legi de compoziţie între elementele unei mulţimi M, asociative, notate cu semnul $\top$ avem:

a) $[(a \top b) \top c] \top d = a \top [(b \top c) \top d]$.

b) $[(a \top b \top c] \top (d \top e) = \{a \top [(b \top c) \top d] \top\} e$.

(Literele a, b, c, d, e reprezintă elemente din M.)

• **15.** Fie $E = \{e, a, b, c, d, f, g\}$ şi legea de compoziţie dată în tabelul:

$\top$	e	a	b	c	d	f	g
e	e	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g	e
b	b	c	d	f	g	e	a
c	c	d	f	g	e	a	b
d	d	f	g	e	a	b	c
f	f	g	e	a	b	a	d
g	g	e	a	b	c	d	f

a) Să se verifice că:

$$a \top (a \top b) = (a \top a) \top b,$$
$$a \top (b \top c) = (a \top b) \top c,$$
$$b \top (c \top d) = (b \top c) \top d.$$

b) Este legea $\top$ asociativă?

• **16.** În mulţimea R a numerelor reale definim o lege de compoziţie notată cu semnul $\top$ în felul următor:

$$x \top y = 6xy + 3x + 3y + 1.$$

a) Să se calculeze $\frac{3}{4} \top 2$.

b) Să se verifice că legea $\top$ este asociativă.

c) Să se arate că există un element e aparţinînd lui R astfel încît $x \top e = x$, oricare ar fi $x \in E$.

d) Să se rezolve ecuaţia:

$$a \top x = e.$$

17. În mulţimea R a numerelor reale punem

$$\max.\ (x,y)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x \geqslant y\\ x, & \text{dacă } y > x\end{cases} \quad \text{şi} \quad \min.\ (x,\ y)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x \leqslant y\\ y, & \text{dacă } y < x\end{cases}.$$

Legea de compoziţie $x \top y = \max.\ (x,\ y)$ este asociativă?

Dar legea $x \perp y = \min.\ (x,\ y)$?

18. Fie F mulţimea funcţiilor definite pe R cu valori în R şi funcţiile $f, g, h \in F$ definite astfel: $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = \sin(x + 1)$, $h(x) = \ln\ (x^2 + 1)$. Să se verifice prin calcul direct că $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

19. Fie M mulţimea permutărilor asupra mulţimii $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ şi permutările $f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. Să se verifice prin calcul direct că $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

20. Fie M mulţimea matricelor pătrate de ordinul doi în care considerăm matricele $A = \begin{Vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix}0 & -2\\ 3 & -4\end{Vmatrix}$, $C = \begin{Vmatrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. Să se verifice prin calcul direct că $(A + B) + C = A + (B + C)$ şi $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

21. Să se demonstreze că adunarea vectorilor de poziţie este asociativă.

22. În mulţimea claselor de resturi modulo 12 să se verifice egalităţile:

$$(\widehat{8} + \widehat{9}) + \widehat{11} = \widehat{8} + (\widehat{9} + \widehat{11}) \text{ şi } (\widehat{8} \cdot \widehat{9}) \cdot \widehat{11} = \widehat{8} \cdot (\widehat{9} \cdot \widehat{11}).$$

COMUTATIVITATE

23. Se ştie că în cazul unei legi de compoziţie asociative şi comutative, compusul a trei sau mai multe elemente nu depinde de aşezarea parantezelor şi ordinea elementelor (5.1.19).

a) Să se verifice, urmîndu-se toate etapele, că în cazul unei legi $\top$ asociative şi comutative avem:

$$(a \top b) \top (c \top d) = [b \top (d \top a)] \top c.$$

24. Să se calculeze, urmîndu-se toate etapele:

a) $$[A \cup (B \cup A)] \cup [B \cup (B \cup A)],$$

b) $$[(A \cap B) \cap B] \cap [(B \cap A) \cap A].$$

Se va folosi asociativitatea, comutativitatea şi relaţia $A \cup A = A$, respectiv $A \cap A = A$.

25. a) Să se definească pe mulţimea $\{e, a, b, c\}$ o lege de compoziţie care să fie comutativă, dar neasociativă.

b) Să se definească pe mulţimea $\{e, a, b, c\}$ o lege de compoziţie asociativă, dar necomutativă (Se va da legea prin tabel).

26. Asociind oricărui cuplu (A, B) de puncte ale planului P mijlocul $A \top B$ al segmentului $\overline{AB}$ definim o lege de compoziţie peste tot definită în P.

a) Este legea $\top$ asociativă? b) Este legea $\top$ comutativă?

27. Fie R_+ mulţimea numerelor reale pozitive.

Facem notaţiile:

1. $x \top y = \frac{x+y}{2}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media aritmetică),

2. $x \perp y = \sqrt{x \cdot y}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media geometrică),

3) $x * y = \frac{2xy}{x+y}$, $x \in R_+$, $y \in R_+$ (media armonică).

a) Este legea $\top$ asociativă? Dar comutativă?

b) Este legea $\perp$ asociativă? Dar comutativă?

c) Este legea $*$ asociativă? Dar comutativă?

28. În mulţimea F a funcţiilor definite pe R cu valori în R, să se dea un exemplu de funcţii f şi g pentru care $f \circ g \neq g \circ f$.

29. În mulţimea M a matricelor pătrate de ordinul doi, să se precizeze două matrice A şi B, astfel încît $A \cdot B \neq B \cdot A$ şi două matrice diferite C şi D, astfel încît $C \cdot D = D \cdot C$.

30. În mulţimea M a permutărilor asupra mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să se precizeze două permutări a şi b astfel încît $a \circ b \neq b \circ a$ şi două permutări diferite c şi d astfel încît $c \circ d = d \circ c$.

31. Să se precizeze cum trebuie să fie polinomul $Axy + Bx^2 + Cy^2 + Dx + Ey$, astfel încît legea $x \top y = Axy + Bx^2 + Cy^2 + Dx + Ey$ (în R) să fie comutativă.

ELEMENT NEUTRU

$\top$	a	b	c	d
a	b	c	a	d
b	a	b	b	d
c	a	b	c	d
d	b	a	d	d

32. Fie legea de compoziţie notată cu semnul $\top$ între elementele mulţimii $E = \{a, b, c, d\}$ dată în tabelul alăturat. Există element neutru?

33. Fie legea de compoziţie definită pe mulţimea $E = \{a, b, c, d, e\}$ dată în tabelul următor:

$\top$	a	b	c	d	e
a	a	a	b	a	d
b	a	d	a	b	e
c	b	a	b	c	d
d	a	b	c	d	a
e	d	e	d	a	c

a) Să se verifice că legea $\top$ este comutativă.
b) Avem $d\top a = a$, $d\top b = b$, $d\top c = c$. Este d element neutru?

34. În mulţimea Q definim următoarea lege de compoziţie,

$$x\top y = xy - x - y + 2.$$

a) Să se arate că legea $\top$ este asociativă. b) Să se arate că legea $\top$ este comutativă. c) Există element neutru faţă de legea $\top$?

35. În mulţimea R_+ a numerelor reale pozitive definim următoarea lege de compoziţie $x\top y = x^{\log_a y}$.

a) Să se arate că legea $\top$ este asociativă. b) Să se arate că legea $\top$ este comutativă. c) Să se arate că există element neutru.

36. a) Să se dea un exemplu de lege de compoziţie asociativă şi comutativă fără element neutru.

b) Să se dea un exemplu de lege de compoziţie neasociativă şi necomutativă faţă de care există element neutru.

37. Fie mulţimea $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi legea de compoziţie $\hat{x}\top\hat{y} = (\hat{3}\cdot\hat{x}\cdot\hat{y}) + (\hat{4}\cdot\hat{x}) + (\hat{4}\cdot\hat{y}) + \hat{4}$, unde semnele $\cdot$, $+$ reprezintă înmulţirea, respectiv adunarea în mulţimea claselor de resturi modulo 5.

a) Să se arate că legea $\top$ este comutativă.

b) Să se arate că elementul $\hat{4}$ este element neutru faţă de legea $\top$ (se va verifica pentru fiecare element în parte).

ELEMENTE SIMETRICE

38. Fie mulţimea $\{e, a, b, c, d\}$ şi legea $\top$ dată în tabelul de mai jos:

$\top$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	e	b	e
b	b	e	d	e	a
c	c	b	e	a	b
d	d	e	a	b	b

a) Să se verifice că legea $\top$ este comutativă.
b) Să se arate că orice element admite un simetric.
c) Este legea $\top$ asociativă?

39. În mulțimea claselor de resturi modulo 6 fiecare element admite un simetric pentru adunare. a) Să se precizeze opusul fiecărui element.

40. În mulțimea claselor de resturi modulo 7 orice element diferit de $\hat{0}$ este inversabil. Să se determine $\hat{1}^{-1}$, $\hat{2}^{-1}$, $\hat{3}^{-1}$, $\hat{4}^{-1}$, $\hat{5}^{-1}$, $\hat{6}^{-1}$.

41. În mulțimea claselor de resturi modulo 10 să se precizeze elementele care sînt inversabile și cele care nu sînt inversabile.

42. În mulțimea funcțiilor definite pe R (mulțimea numerelor reale) cu valori în aceeași mulțime, fie $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = \operatorname{arctg}(3x + 2)$. a) Să se arate că funcțiile f și g sînt inversabile.

b) Să se determine f^{-1}, g^{-1}.

43. În mulțimea $M = \{a + b\sqrt{2},\ a \in Z,\ b \in Z\}$ există elemente inversabile și elemente neinversabile față de înmulțire. Să se precizeze trei elemente inversabile și trei elemente neinversabile.

44. În mulțimea R a numerelor reale considerăm următoarea lege de compoziție peste tot definită:

$$x \top y = 3xy - 6x - 6y + 14.$$

a) Să se arate că există element neutru față de legea $\top$.
b) Să se arate că există un singur element care nu admite simetric.

45. Fie M mulțimea claselor de resturi modulo 11.

a) Să se rezolve ecuația $(\hat{3} \cdot x) + \hat{4} = \hat{9}$. $(x \in M)$.

b) Să se rezolve ecuația $(\hat{5} \cdot x) + \hat{6} = \hat{8}$ $(x \in M)$.

46. Fie M mulțimea permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Să se afle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

b) Să se rezolve ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Să se rezolve ecuația:

$$Y \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

47. Fie $M = \{x \in R \mid x = a - b\sqrt{7},\ a \in Q,\ b \in Q,\ a^2 - 7b^2 = 1\}$.
a) Să se arate că înmulțirea este peste tot definită.
b) Să se arate că orice element admite un simetric.

48. Să considerăm mulțimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & 8y \\ y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$ și $x^2 - 8y^2 = 1$.

a) Să se arate că înmulţirea este peste tot definită.

b) Să se arate că orice matrice din M este inversabilă şi să se calculeze inversa.

DISTRIBUTIVITATE

49. Să se demonstreze că reuniunea este distributivă faţă de intersecţie şi intersecţia este distributivă faţă de reuniune.

50. Fie o mulţime M înzestrată cu două legi de compoziţie una notată aditiv (cu semnul „+“) şi alta notată multiplicativ cu semnul „·“.

Ştiind că legea · este asociativă şi distributivă faţă de legea +, şi că legea + este asociativă, să se arate că

a) $(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bz + by + bz$. b) $(x + y)^2 = xx + xy + yx + yy$.

51. În mulţimea R a numerelor reale definim două legi de compoziţie notate cu semnul $\perp$ respectiv $\top$ în modul următor:

$$x \perp y = x + y - 2;$$

$$x \top y = \frac{1}{2}xy - x - y + 4.$$

a) Să se demonstreze că ambele legi sînt asociative şi comutative. b) Să se demonstreze că există element neutru faţă de ambele legi. c) Să se demonstreze că legea $\top$ este distributivă faţă de legea $\perp$.

52. În mulţimea R a numerelor reale definim două legi de compoziţie notate cu semnele $\oplus$ şi $\odot$ în modul următor:

$$x \oplus y = \sqrt[3]{2(x^3 + y^3) - 12};$$

$$x \odot y = \sqrt[3]{4x^3y^3 - 12(x^3 + y^3) + 36}.$$

Să se demonstreze că legea $\odot$ este distributivă faţă de legea $\oplus$.

53. Să se dea un exemplu de lege de compoziţie distributivă faţă de altă lege de compoziţie, astfel încît prima lege să fie necomutativă.

54. Fie F mulţimea funcţiilor $f: R \to R$ de forma $f(x) = ax + b (a \neq 0)$.

a) Să se arate că legea de compoziţie $f + g$ este peste tot definită în F. b) Să se arate că compunerea este peste tot definită în F. c) Să se arate că oricare ar fi funcţiile f, g, h din F, avem:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

Este compunerea distributivă faţă de adunare?

55. În R, legea max. (x, y) este distributivă faţă de legea min. (x, y)?

56. Să se verifice că adunarea definește o structură de grup pe următoarele mulțimi:

a) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in R \mid x = 2\alpha, \alpha \in Z, \alpha \neq 0\}$

b) $\{\ldots, -2k, -k, 0, k, 2k, \ldots\} = \{x \in R \mid x = \alpha k, \alpha \in Z, k \in R, k \neq 0\}$.

Să se verifice că înmulțirea definește o structură de grup pe următoarele mulțimi:

c) $\{\ldots, 3^{-2}, 3^{-1}, 1, 3, 3^2, \ldots\} = \{x \in R \mid x = 3^\alpha, \alpha \in Z, \alpha \neq 0\}$

d) $\{\ldots, k^{-2}, k^{-1}, 1, k, k^2, \ldots\} = \{x \in R \mid x = k^\alpha, \alpha \in Z, k \in R, k \neq 0, k \neq 1\}$.

57. a) Să se arate că dacă un grup aditiv de numere reale conține pe 1, atunci conține mulțimea numerelor întregi.

b) Să se arate că dacă un grup multiplicativ de numere reale conține mulțimea numerelor întregi nenule, atunci conține și mulțimea numerelor raționale nenule.

58. Mulțimea matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$, $x \neq 0$, sau $y \neq 0$ formează grup față de înmulțire? În caz afirmativ să se precizeze dacă este comutativ.

59. a) Dați un exemplu de grup necomutativ cu 24 elemente. b) Dați un exemplu de grup necomutativ avînd o infinitate de elemente.

60. Să se verifice că înmulțirea determină pe mulțimea $[1, \alpha, \beta]$ a rădăcinilor cubice ale unității, o structură de grup comutativ.

61. Fie σ_4 grupul permutărilor asupra mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ (grupul simetric de gradul 4) și $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze π^{27}, π^{-38}. (Se va observa că $\pi^3 = e$.)

62. În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6 să se determine elementele $7 \cdot \hat{3} + 9 \cdot \hat{3}$ și apoi să se verifice că $7 \cdot \hat{3} + 9 \cdot \hat{3} = (7 + 9) \cdot \hat{3}$.

63. Fie G un grup, în care legea de compoziție este notată cu semnul $\top$, iar elementul neutru cu e.

Să se demonstreze că

$$x \top a \top y = x \top y \Leftrightarrow a = e \qquad (a \in G,\ b \in G,\ x \in G).$$

64. Într-un grup G multiplicativ, avem:

a) $x^2 = x \Leftrightarrow x = e \Leftrightarrow x^{-1} = x$,

b) $x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^3 = e \Leftrightarrow x^{-2} = x$,

c) $x^n = x^k \Leftrightarrow x^{n-k} = e \Leftrightarrow x^{k-n+1} = x$.

d) Să se transcrie proprietățile a), b), c) în cazul unui grup notat aditiv.

65. Fie G un grup multiplicativ în care $x^2 = e$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că G este comutativ. b) Să se transcrie rezultatul precedent în cazul unui grup aditiv.

66. În grupul permutărilor asupra mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să se rezolve ecuaţiile:

a) $\pi^{59} \cdot X = \pi^{25}$. b) $X \cdot \pi^{59} = \pi^{23}$, unde $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (Se va observa că $\pi^3 = e$.)

În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 8, să se rezolve ecuaţiile:

a) $\hat{3} + x = \hat{7}$, b) $x + \hat{5} = \hat{2}$.

67. a) Să se arate că toate grupurile, avînd două elemente, sînt izomorfe. Se va utiliza identificarea cu ajutorul tabelului legilor de compoziţie.) b) Să se arate că toate grupurile cu 3 elemente sînt izomorfe.

68. a) Fie Ox şi Oy două axe perpendiculare în planul P. Notăm cu e transformarea identică a planului P, cu S_{ox} simetria faţă de axa Ox, cu S_{oy} simetria faţă de axa Oy şi cu S_0 simetria faţă de O.

Să se arate că compunerea defineşte pe mulţimea $\{e, S_{ox}, S_{oy} S_0\}$ o structură de grup.

b) Fie Ox, Oy, Oz trei semidrepte perpendiculare două cîte două în spaţiul S. Notăm cu e transformarea identică a spaţiului S, cu S_x simetria faţă de axa Ox, cu S_y simetria faţă de axa Oy, cu S_z simetria faţă de axa Oz.

Să se arate că compunerea defineşte pe mulţimea $\{e, S_x, S_y, S_z\}$ o structură de grup.

c) Fie $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ şi $P(E) = \{\phi, A, B, E\}$.

Să se arate că legea de compoziţie
$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$, $X \in P(E)$, $Y \in P(E)$ defineşte pe mulţimea $\{\phi, A, B, E\}$ o structură de grup.

d) Să se arate că grupurile definite la punctele a), b), c) sînt izomorfe. Orice grup izomorf cu grupurile de la a), b), c) se numeşte *grupul lui Klein*.

e) Există o structură de grup cu 4 elemente care să nu fie izomorfă cu grupurile de la a), b), c)?

69. Să se demonstreze că grupul aditiv al vectorilor de poziţie este izomorf cu grupul translaţiilor (faţă de compunere).

70. Fie un poligon regulat cu n laturi. Notăm cu $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ rotaţiile în jurul centrului care lasă poligonul pe loc ($r_0 = R(0°)$, $r_1 = R\left(\frac{360°}{n}\right)$, $r_2 = R\left(2 \cdot \frac{360°}{n}\right), \ldots, r_{n-1} = R\left((n-1)\frac{360°}{n}\right)$.

a) Să se verifice că compunerea definește pe mulțimea $\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}$ o structură de grup comutativ *(grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi)*.

b) Să se facă tabelul operației pentru cazul rotațiilor triunghiului echilateral și hexagonului regulat.

c) Să se verifice că grupul rotațiilor hexagonului regulat este izomorf cu grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6. Generalizare.

71. Fie $G_n = \{1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ mulțimea rădăcinilor complexe de ordinul n ale unității. a) Să se verifice că înmulțirea determină pe G_n o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că acest grup este izomorf cu grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi.

72. a) Să se verifice că mulțimea M a matricelor nesingulare de ordinul doi este grup față de înmulțire.

b) Să se arate că aplicația $f: R \setminus \{0\} \to M$, astfel încît $x \to \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix}$ este un omomorfism. (Mulțimea $R \setminus \{0\}$ se consideră grup multiplicativ.)

73. a) Fie F_1 mulțimea funcțiilor definite pe R cu valori în R, derivabile pe R. Să se arate că adunarea definește pe F_1 o structură de grup. b) Fie F_2 mulțimea derivatelor funcțiilor de la punctul a). Să se arate că adunarea definește o structură de grup pe F_2. c) Să se arate că aplicația $\varphi: f \to f'$, a mulțimii F_1, pe mulțimea F_2, este un omomorfism.
Este aplicația φ un izomorfism?

INELE

74. Să se arate că adunarea și înmulțirea definesc o structură de inel pe următoarele mulțimi de numere:

a) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in R, x = 2\alpha, \alpha \in Z,\}$

b) $\{-2k, -k, 0, k, 2k \ldots\} = \{x \in R, x = \alpha k, \alpha \in Z, k \in R, k \neq 0\}$.

c) Să se arate că inelele de la a) și b) sînt izomorfe.

75. Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimile $M = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in Z, y \in Z\}$ și $P = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in Z, y \in Z\}$ o structură de inel. Sînt izomorfe cele două inele?

76. În inelul I al claselor de resturi modulo 5, să se calculeze:

a) $(\hat{3} \cdot x^3 + \hat{2} \cdot x^2 + \hat{3} \cdot x + \hat{4})(\hat{2} \cdot x^3 + \hat{4} \cdot x^2 + \hat{1})$, b) $(x - \hat{2})(x^2 + \hat{2}x + \hat{4})$, c) $(x + y)^{12}$.

(Se va observa că $x^4 = \hat{1}$, $x^5 = x$, $x^6 = x^2$, oricare ar fi $x \in I$ și $x \neq \hat{0}$.)

77. Fie I un inel comutativ.

Să se arate că sînt adevărate următoarele egalități:

a) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, b) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$, c) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$, d) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. e) $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}a^k$ (binomul lui Newton).

78. În inelul claselor de resturi modulo 7 să se rezolve ecuația $\hat{3} \cdot (x \cdot \hat{4}) = \hat{5}$.

79. În inelul claselor de resturi modulo 12 să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{3} \cdot x + \hat{4} \cdot y = \widehat{11} \\ \hat{4} \cdot x - \hat{3} \cdot y = \widehat{10} \end{cases}$$

Se poate aplica metoda substituției?

80. a) Să se arate că legile $\oplus$, $\odot$ definite pe mulțimea Z a numerelor întregi în felul următor:

$$x \oplus y = x + y - 3$$
$$x \odot y = xy - 3(x + y) + 12$$

determină pe Z o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

b) Să se arate că între inelul numerelor întregi și inelul definit la punctul a) există un izomorfism de forma $f(x) = ax + b$.

81. Să se arate că legile $\oplus$ și $\odot$ definite pe mulțimea R a numerelor reale, în felul următor:

$$x \oplus y = x + y - 2,$$
$$x \odot y = \frac{1}{3} xy - \frac{2}{3} x - \frac{2}{3} y + \frac{10}{3},$$

determină pe R o structură de inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

82. Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & 5y \\ y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Z$ și $y \in Z$, o structură de inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

83. a) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea $M = \{z \in R \mid z = x + y\sqrt{2},\ x \in Z,\ y \in Z\}$ o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

b) Să se arate că adunarea şi înmulţirea definesc o structură de inel în mulţimea P a matricelor de forma

$$\left\| \begin{matrix} x + 2y & 2y \\ -y & x - 2y \end{matrix} \right\|, \text{ unde } x \in Z \text{ şi } y \in Z.$$

c) Să se arate că aplicaţia $(x + y\sqrt{2}) \to \left\| \begin{matrix} x + 2y & 2y \\ -y & x - 2y \end{matrix} \right\|$ este un izomorfism.

84. a) Se ştie că în cazul polinoamelor cu coeficienţi numerici, condiţia necesară şi suficientă ca un polinom să fie identic nul este ca toţi coeficienţii să fie nuli.

Să se arate că polinomul $x^5 + \hat{4}x$, unde coeficienţii sînt din clasele de resturi modulo 5, este identic nul.

Să se explice acest rezultat, revăzîndu-se demonstraţia în cazul polinoamelor cu coeficienţi numerici.

b) Să se arate că un polinom de grad mai mic de 5, cu coeficienţi în clasele de resturi modulo 5, este identic nul dacă şi numai dacă toţi coeficienţii sînt nuli.

85. Să se arate că polinomul $\hat{2}x^2 + \hat{2}x$, cu coeficienţi în clasele de resturi modulo 4 este identic nul, deşi în clasele de resturi modulo 4 există trei valori distincte. Să se explice rezultatul.

86. Să se arate că polinoamele $x^5 + \hat{2}x$ şi $\hat{3}x^5$, cu coeficienţi în clasele de resturi modulo 5, sînt identice. Explicaţie.

87. Să se arate că adunarea şi înmulţirea definesc pe mulţimea matricelor pătrate, de ordinul doi, o structură de inel cu element unitate, necomutativ, şi cu divizori ai lui 0. (Se vor da efectiv exemple de matrice X şi Y astfel încît $X \cdot Y \neq Y \cdot X$ şi exemple de matrice A şi B, nenule, astfel încît $A \cdot B = 0$.)

88. Fie F mulţimea funcţiilor definite pe R cu valori în R.

Să se arate că legile de compoziţie

$$f + g : x \to f(x) + g(x),$$

$$f \cdot g : x \to f(x) \cdot g(x),$$

definesc pe F o structură de inel comutativ, cu element unitate şi cu divizori ai lui 0 (se vor da efectiv exemple de divizori ai lui 0).

Ce se poate spune în cazul cînd F este mulţimea funcţiilor definite pe R cu valori în R şi continue pe R?

89. a) Să se arate că adunarea şi înmulţirea determină o structură de corp pe următoarele mulţimi:

$$M = \{z \in R | z = x + y\sqrt{5},\ x \in Q,\ y \in Q\},$$

$$P = \{z \in R | z = x + y\sqrt{7},\ x \in Q,\ y \in Q\}.$$

b) Sînt izomorfe cele două corpuri?

90. a) Să se dea exemple de inele care nu sînt corpuri.

b) Să se dea exemple de inele fără divizori ai lui 0 care nu sînt corpuri.

91. Să se demonstreze că orice corp numeric (faţă de adunarea şi înmulţirea curentă) conţine corpul numerelor raţionale.

92. a) Să se determine cel mai mic corp de numere reale (faţă de adunarea şi înmulţirea curentă), care conţine pe $\sqrt{c}$ ($\sqrt{c}$ iraţional şi $c \in Q$).

b) Să se determine cel mai mic corp de numere reale (faţă de adunare şi înmulţirea curentă) care conţine pe $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$.

93. Să se arate că într-un corp comutativ avem:

$$x^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = a \quad \text{sau } x = -a$$

$$x^3 - a^3 = 0 \Leftrightarrow x = a \quad \text{sau } x^2 + ax + a^2 = 0$$

$$x^3 + a^3 = 0 \Leftrightarrow x = -a \quad \text{sau } x^2 - ax + a^2 = 0.$$

94. Fie $f: C \to C'$ un izomorfism al corpului C pe corpul C'.

a) Să se arate că $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$. Caz particular: $f(nx) = nf(x)$.

b) Să se arate că $f(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$. Caz particular: $f(x^n) = [f(x)]^n$.

c) Să se arate că $f(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n) = f(a_0)[f(x)]^n + f(a_1)[f(x)^{n-1}] + \ldots + f(a_n)$.

95. Fie corpul $C = \{x \in R | x = a + b\sqrt{c},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q,\ \sqrt{c} \notin Q\}$ (faţă de adunarea şi înmulţirea curentă).

a) Să se arate că aplicaţia $f: C \to C$ definită prin $f(x + \sqrt{c}) = x - \sqrt{c}$ este un izomorfism al corpului C pe corpul C.

b) Să se arate că dacă $a \in Q$, $f(a) = a$.

c) Să se demonstreze că dacă $x_0 = a + b\sqrt{c}$ ($a \in Q$, $b \in Q$, $c \in Q$ şi $\sqrt{c} \notin Q$) este o rădăcină a ecuaţiei $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ unde $a_k \in Q$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), atunci şi $f(x_0) = a - b\sqrt{c}$ este o rădăcină a ecuaţiei.

96. a) Fie C corpul numerelor complexe. Aplicaţia $f: C \to C$, astfel încît $f(a + bi) = a - bi$, este izomorfism al corpului C pe el însuşi.

b) Să se arate că dacă $a \in R$, atunci $f(a) = a$.

c) Să se arate că dacă $x_0 = a + bi (a \in R, b \in R)$ este o rădăcină a ecuației $a_0x^n + a_1x^{n-1} ... + a_n = 0$ unde $a_k \in R (k = 0, 1, 2, ..., n)$, atunci și $\bar{x}_0 = a - bi$ este o rădăcină a ecuației.

97. Să se arate că următoarele legi de compoziție:

$$x \oplus y = x + y - 2,$$

$$x \odot y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$$

determină pe mulțimea numerelor reale o structură de corp și că acest corp este izomorf cu corpul numerelor reale.

98. Să se demonstreze că într-un corp comutativ, în care notăm cu $\frac{a}{b}$ elementul ab^{-1} $(b \neq 0)$ avem:

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$,

b) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0,\ c \neq 0)$,

c) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

99. În corpul claselor de resturi modulo 5, să se calculeze:

a) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \frac{\hat{1}}{\hat{3}}$, b) $\frac{\hat{3}}{\hat{4}} \cdot \frac{\hat{3}}{\hat{2}}$, c) $\left(\frac{\hat{3}}{\hat{2}} + \frac{\hat{1}}{\hat{4}}\right)\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \frac{\hat{2}}{\hat{3}}\right)\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}}\right)^3$.

100. Fie K un corp comutativ și $c \in K$.

a) Dacă ecuația $x^2 = c$, are soluția $\delta(c)$, atunci are și soluția $-\delta(c)$ și $\delta(c)$, $-\delta(c)$ sînt singurele soluții ale ecuației $x^2 = c$.

b) Să se arate că ecuația de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ are soluții, atunci și numai atunci, cînd ecuația $x^2 = b^2 - 4ac$ are soluții și acestea sînt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \delta(b^2 - 4ac)}{2a}$ ($\delta(b^2 - 4ac)$ este una dintre soluțiile ecuației $x^2 = b^2 - 4ac$).

c) Dacă corpul K este corpul numerelor reale, să se transpună rezultatele de la punctele a) și b).

d) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{1} = \hat{0}$ în corpul claselor de resturi modulo 5 și în corpul claselor de resturi modulo 7.

101. Pe mulțimea numerelor reale se consideră următoarele legi de compoziție:

$$x \oplus y = x + y - 1$$

$$x \odot y = 2xy - 2x - 2y + 3,$$

a) Să se arate că acestea determină pe R o structură de corp.

b) Să se arate că aplicaţia $f: R \to R$, astfel încît $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ este un izomorfism al corpului determinat pe R de adunare şi înmulţire, pe corpul determinat pe R de legile $\oplus$ şi $\odot$.

102. a) Să se arate că adunarea şi înmulţirea determină pe mulţimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$, unde $x \in R$, $y \in R$, o structură de corp comutativ, cu element unitate.

b) Să se arate că aplicaţia $f: C \to M$, $f(x) + iy) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$, definită pe mulţimea numerelor complexe cu valori în mulţimea matricelor definită la punctul a) este un izomorfism.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

CAPITOLUL I

3. a) $z^2 - (2 - i)\ z - 1 + 5i$. b) $z^3 - z^2 - 5z + 21$. c) $z^4 - (5 + 3i)z^3 + (5 + 12i)z^2 + (5 - 13i)z - 6 + 2i$. d) $z^4 - 11z^3 + 44z^2 - 74z + 40$.

4. a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. b) $1 + i$, $1 + 2i$. c) $2 + i$, $3 - i$ d) $2i$, $-\frac{7}{5}i$.

6. Fie m și n gradele celor două polinoame. Condiția $m + n = 0$ $(m, n \in N)$ dă $m = 0$, $n = 0$.

7. a) m. b) Nu are grad.

8. Nu, căci coeficientul primului termen, $a_0 b_0 x^{m+n}$ poate fi zero, deși $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

9. $c = a$, $d = -b$, numerele trebuie să fie imaginar conjugate.

11. v. 1.2.3.

12. Dacă determinantul unui sistem de n ecuații liniare și omogene este diferit de zero, sistemul admite numai soluția banală (nulă).

14. $P(z)$ este singurul polinom (1.2.4).

15. $P(z) = az^2 + bz + c$; ecuațiile $a + b + c = 9$, $4a + 2b + c = 17$, $a - b + c = 11$ dau $a = 3$, $b = -1$, $c = 7$, deci $P(z) = 3z^2 - z + 7$.

16. În formulele lui Cramer, prin care se află coeficienții polinomului, intervin numai operații raționale.

17. a) $az^2 - az + b$. b) Același rezultat. c) Același rezultat oricare ar fi gradul polinomului.

18. Cuvîntul *identic* nu are aici același sens ca în vorbirea obișnuită (v. 1.2.1). Adjectivului *identic* din limba obișnuită îi corespunde aici adjectivul *egal*. Polinoamele se numesc, totuși, identice pentru că cele două funcții definite de ele sînt una și aceeași funcție.

19. a) Funcția este surjectivă căci pentru orice polinom există cel puțin o expresie algebrică întreagă de la care provine; ea nu este injectivă, căci mai multe expresii algebrice întregi diferite pot duce la același polinom. b) Funcția este surjectivă și injectivă datorită teoremei cu privire la identitatea a două polinoame (1.2.4).

20. $a = 4$, $b = -2$, $c = -1$.

21. Cerc vicios.

23. a) Cîtul: $2z^2 + (3 + i)z + i$, restul: $2 - i$. b) Cîtul: $z + 3 + 2i$, restul $(2 + i)z + 80 - 30i$. c) Cîtul: $2z^2 + z - i$, restul iz.

24. Nu.

26. Se face împărțirea și se pune condiția ca restul să fie polinomul nul; $a = 11$, $b = -12$. Se poate folosi și metoda coeficienților nedeterminați.

27. În identitatea $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + mx + n$ se pune $x = a$ și $x = b$ și se obțin două ecuații cu necunoscutele m și n. Restul $= \frac{P(a) - P(b)}{a - b} x + \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}$.

28. a) Numai dacă gr. $D(z) <$ gr. $B(z)$. b) Numai dacă $D < B$.

29. a) Da. Cîtul este polinomul P^*, iar restul este $A(z)$. b) Nu. Împărțirea prin P^* nu este definită și nici nu se poate defini, căci ar trebui ca gr. $R(z) <$ gr. P^*, și P^* nu are grad. c) Da.

30. a) La numerele naturale se pune condiția $R < I$, iar la polinoame nu se pune condiția $R(x) < I(x)$, care n-ar avea nici un sens, ci gr. $R(x) <$ gr. $I(x)$. b) Dacă măcar unul dintre numerele $D(a)$, $I(a)$, $C(a)$, $R(a)$ nu este întreg, afirmația nu are nici un sens. Dacă toate sînt întregi, numai dacă $R(a) < I(a)$, c) $4 < x - 2$; $x > 6$.

31. a) Primele trei afirmații sînt adevărate, a patra este falsă. b) Toate afirmațiile sînt adevărate. c) Toate afirmațiile sînt false (v. și probl. 9).

32. Fie $c_0z^2 + c_1z + c_2$ și $r_0z^2 + r_1z + r_2$ cîtul și restul. Procedînd ca la 1.3.2 se obține un sistem de 6 ecuații liniare cu necunoscutele $c_0, c_1, c_2, r_0, r_1, r_2$. Determinantul sistemului este egal cu $b^3 \neq 0$, deci sistemul admite o soluție unică.

34. Pentru a face, de exemplu, scăderea $\hat{2} - \hat{5}$ în Z_7, se caută în tabela de adunare a lui Z_7 în linia lui $\hat{5}$ elementul $\hat{2}$; el se găsește în coloana lui $\hat{4}$, deci $\hat{2} - \hat{5} = \hat{4}$. Se poate proceda și astfel: $7 - 5 = 2$, deci $\hat{2}$ este opusul lui $\hat{5}$, $-\hat{5} = \hat{2}$ și se adună $\hat{2}$ cu opusul lui $\hat{5}$, care este tot $\hat{2}$; $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$. Alt exemplu: în Z_{10}, $\hat{3} - \hat{8} = ?$ $10 - 8 = 2$, deci $-\hat{8} = \hat{2}$; $\hat{3} + \hat{2} = \hat{5}$, deci $\hat{3} - \hat{8} = \hat{5}$. În mod analog se face împărțirea. Exemplu: în Z_5, $\hat{3} : \hat{4} = ?$ În tabela de înmulțire pentru Z_5 se caută $\hat{4}$ în linia lui $\hat{3}$; el se găsește în coloana lui $\hat{2}$, deci $\hat{3} : \hat{4} = \hat{2}$. Dacă deîmpărțitul se găsește de mai multe ori, împărțirea dă tot atîtea cîturi, iar dacă deîmpărțitul nu se găsește în linia împărțitorului, împărțirea nu se

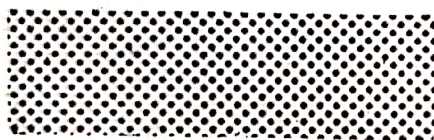
poate face. Exemplu: în Z_{10}, $\widehat{6} : \widehat{4} = ?$ În linia lui $\widehat{4}$ elementul $\widehat{6}$ se găsește în coloana lui $\widehat{4}$ și în coloana lui $\widehat{9}$, deci $\widehat{6} : \widehat{4} = \{\widehat{4}, \widehat{9}\}$. Tot în Z_{10}, împărțirea $\widehat{3} : \widehat{4}$ sau $\widehat{5} : \widehat{4}$ nu se poate face. a) $\widehat{1}$;$\widehat{3}$; $\widehat{4}$; $\widehat{6}$; $\widehat{3}$;$\widehat{4}$; $\widehat{2}$; $\widehat{4}$. b) $\widehat{2}$; $\widehat{5}$; $\widehat{5}$; $\widehat{4}$; $\widehat{3}$; $\widehat{3}$; imposibil;$\{\widehat{2}, \widehat{5}\}$. c) $\widehat{5}$; $\widehat{6}$;$\{\widehat{3}; \widehat{8}\}$,$\{\widehat{1}, \widehat{6}\}$;$\{\widehat{4}, \widehat{9}\}$;$\{\widehat{2}, \widehat{7}\}$; $\widehat{1}, \widehat{3}, \widehat{5}, \widehat{7}, \widehat{9}\}$;$\{\widehat{2}, \widehat{7}\}$.

35. a) Da, fiindcă în fiecare linie din tabela de adunare fiecare element apare o singură dată. b) Da. c) Da, dacă $y \neq 0$. d) Nu. e) Nu.

36. a) Dacă n este număr prim, Z_n nu are divizori ai lui zero. În $Z_4 : \widehat{2}$; în Z_6: $\widehat{2}$ și $\widehat{3}$; în $Z_{12} : \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}$ și $\widehat{6}$.b) În Z_3, Z_5 și Z_7.

37. a) $x^2 + \widehat{2}$.b) $\widehat{6}x^3 + \widehat{7}x^2 + \widehat{9}x + \widehat{3}$. Fiindcă în Z_6 și Z_{10} există divizori ai lui zero.

38. Teorema de la 1.2.2. presupune că, în cazul unui polinom de gradul n, mulțimea de definiție are cel puțin $n + 1$ elemente și coeficienții aparțin unei mulțimi fără divizori ai lui zero.
a) Prima dintre aceste condiții nu este îndeplinită. b) Idem. c) Pentru $P(x)$ condiția a doua nu este îndeplinită, pentru $Q(x)$ nici prima, nici a doua.



CAPITOLUL II

1. a) $-1 \pm i\sqrt{2}$. b) Rădăcinile: ± 2, $\pm$ i. **2.** $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ b) $-1 \pm i\sqrt{2}$.

4. $[m = np] \Rightarrow [z^m - 1 = z^{np} - 1 = (z^n)^p - 1]$; se pune $z^n = u$, $u^p - 1$. este divizibil prin $u - 1$.

5. Ultimul termen din rîndul al doilea, adică restul împărțirii este $a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4$.

6. $P(z) - P(c) = a_0(z^n - c^n) + a_1(z^{n-1} + c^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(z - c)$. Fiecare termen din dreapta este divizibil cu $z - c$, deci și suma lor, adică $P(z) - P(c)$ este divizibil cu $z - c$. Fie $Q(z)$ cîtul împărțirii lui $P(z) - P(c)$ prin $z - c$; atunci $P(z) - P(c) = (z - c) \cdot Q(z)$: de unde...

8. Se procedează ca la 2.1.3. **9.** Da; este contrapoziția consecinței teoremei lui Bézout.

10. a) Dacă un număr natural n este divizibil prin numerele *prime* a și b, el este divizibil prin produsul ab, b) v. 2.1.6.

11. Împărțitorul fiind $D(z)$, presupunem că există două cîturi $C_1(z)$ și $C_2(z)$ și două resturi R_1 și R_2. Atunci au loc identitățile $D(z) = (z - a)\ C_1(z) + R_1 =$

$= (z - a)\ C_2(z) + R_2$. Dar $R_1 = D(a)$ și $R_2 = D(a)$, deci $R_1 = R_2$. Din $(z - a)\ C_1(z) = (z - a)\ C_2(z)$ rezultă $C_1(z) = C_2(z)$.

12. a) $a = 10^n$. b) $b^2 - 4ac = 2k^2,\ k \in Q$.

13. Nici o soluție; nu este nici o contradicție, ecuația propusă nu este o ecuație algebrică.

14. Da, căci ecuația $P^* = 0$ este satisfăcută de orice valoare a variabilei, deci ea are cel puțin o rădăcină.

16. Pe baza teoremei de la 2.2.4.

17. Da. Prin ipoteză, există un polinom $Q(x)$ astfel încît $P(z) = (z - a)Q(z)$. Înlocuind aici $Q(z)$ prin descompunerea sa, obținem o descompunere a lui $P(z)$. Descompunerea fiind unică...,

18. Descompunerea este unică.

19. Rădăcinile sînt $\pm \sqrt{6},\ \pm \sqrt{2}$; ecuația propusă nu este o ecuație algebrică.

20. Da, în partea finală, în care se arată că o ecuație de gradul n nu poate avea mai mult ca n rădăcini; da.

21. a) O ecuație de gradul zero, de exemplu ecuația $3 = 0$ nu are nici o rădăcină. b) Nu.

22. Ecuația $P(z) = a$ este tot de gradul n, deci pentru n valori ale lui z.

23. b) Pentru m valori, căci ecuația $P_m(x) = P_n(x)$ este de gradul m. c) Pentru cel mult n valori..

24. $p \leqslant \max.\ (m, n)$, unde p este numărul căutat.

25. $S_p = S_A \cup S_B$.

26. Cel mult n.

27. a) $(z - 1)\ (2z - 1)$. b) $3\left(z - \dfrac{a - ai\sqrt{14}}{3}\right)\left(z - \dfrac{a + ai\sqrt{14}}{3}\right)$. c) $(z - i)\cdot(z - 2i)$. d) $(2z - 1)\,[z - (1 + i)]$. e) $(z - 1)\ (z + 1)\ (2z - 1)\ (2z + 1)$, f) $(z - 1)\cdot(z + 1)\ (z - i)\ (z + i)$.

28. Ambii termeni ai fracției se descompun în factori liniari și se constată că nu au nici un factor comun. Dacă descompunerea n-ar fi unică, nu am avea siguranța că nu există o altă descompunere a numărătorului și a numitorului în care să apară un factor comun.

29. a) $6z^3 - 13z^2 + 9z - 2 = 0$. b) $z^3 - (1 + 3i)z^2 - (2 - 3i)\,z + 2 = 0$. c) $z^3 - 5z^2 - 37z + 41 = 0$. d) $z^4 - 6z^3 + 13z^2 - 14z + 6 = 0$. e) $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 20z - 12 = 0$. f) $z^6 - (3 + i)z^5 + (4 + 3i)z^4 - 4(1 + i)z^3 + (3 + 4i)z^2 - (1 + 3i)z + i = 0$.

30. a) $(x - 2)\ (x + 2)\ P(x)$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul 98. b) Imposibil.

31. a) Da. $(a + bi)\ P(x) = 0$, unde $b \neq 0$ şi $P(x)$ este un polinom cu coeficienţi reali care are numai rădăcini reale. Condiţia ca ecuaţia să aibă această formă este şi necesară, căci, dacă rădăcinile unei ecuaţii $Q(x) = 0$ sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avem $Q(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ unde produsul $P(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$ este un polinom cu coeficienţi reali, deci $Q(x) = a_0P(x)$ are forma de mai sus. b) Da; exemplu: $x^2 + x + 1 = 0$.

33. a) $(z^2 + z - 2)^5$. b) $(z - 1)^m (z + 2)^n$, $m + n = 7$, $m, n \in N$; sînt 6 soluţii. c) Sînt $p - 1$ soluţii.

34. a) Polinoamele se descompun; rădăcinile sînt $z_1, z_2, \ldots z_{m+n}$. b) Fiecare rădăcină comună este o rădăcină dublă a ecuaţiei $P(z)\cdot Q(z) = 0$. c) Ea este rădăcină multiplă de ordinul $p + q$ a ecuaţiei $P(z)\cdot Q(z) = 0$.

35. a) Se aplică teorema de la 2.2.12, $p = 3$, $q = 1$. b) Imposibil (v. 2.2.13, obs. 3).

36. a) Se aplică propoziţia de la 2.2.12; coeficienţii corespunzători sînt egali doi cîte doi.

37. Exemplu: $(x - 1)^3(x - 2)^2$ şi $(x - 1)(x - 2)$ nu au aceleaşi rădăcini.

38. a) v. cap. I, problema 6. b) Din $P(z) = Q(z)C(z)$ şi $Q(z) = P(z)D(z)$ urmează prin înmulţire $C(z)D(z) = 1$. *Altfel*: Fie p gradul lui $P(z)$ şi q gradul lui $Q(z)$. Deoarece $P(z)$ este divizibil prin $Q(z)$, $p \geqslant q$; analog $q \geqslant p$; de unde $p = q$. Polinoamele fiind de acelaşi grad, cîtul lor este o constantă, $P(z) = k\ Q(z)$. c) Cele două numere sînt egale.

39. Pentru relaţia a treia şi a patra, v. 2.4.7. **40.** b) C_n^p termeni.

42. Reciproca. Procedeul bazat pe formulele lui Vieta este derivat din celălalt căci aceste formule se deduc din descompunerea unui polinom în factori.

43. $\dfrac{c - a}{1 - b}$. **44.** $x^3 - ax^2 + sx - v = 0$.

45. a) $\dfrac{2}{3}$, 1, -4. b) 2, 3, $-\sqrt{3}$. c) $-\dfrac{3}{5}$, 1,5. d) i, 2i, $\dfrac{3}{2}$. e) Rădăcinile se notează cu α, 3α şi β; 2, 6 şi -1. f) Rădăcinile se notează cu α, 2α şi β; i, 3i, 6i. g) Rădăcinile se notează cu α, β, $\alpha + \beta$; $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{2a}{3}$, a. h) Rădăcinile se notează cu α, $\alpha + 1$ şi β; se elimină β din primele două relaţii ale lui Vieta, se obţine $3\alpha^2 - (8i - 1)\alpha - 5 - i = 0$. $\Delta = -3 - 4i$, $\sqrt{\Delta} = \pm (2i - 1)$; rădăcinile: i, $1 + i$, 2i. i) Analog cu problema precedentă; rădăcinile: a, $3a$, $-4a$. j) Relaţia dată şi relaţia a treia a lui Vieta dau $z_1 = \pm a^3$, numai a^3 satisface ecuaţia; rădăcinile: a, a^2, a^3. *Altfel*: identificare cu $(z^2 - pz + q)(z - q)$. k) v. problema precedentă; rădăcinile: 1, 3, 6.

46. a) Identificare cu $(z^3 + pz - 1)\ (z^2 + qz + s)$; $1 \pm \sqrt{2}$, $1 \pm \sqrt{5}$. b) Analog cu problema precedentă; 3, i, $1 \pm \sqrt{2}$. c) Identificare cu

$(z^2 - 2z + p)(z^2 + qz + r)$; $1 \pm 2i$, $-1 \pm \sqrt{2}$. d) Analog cu problema precedentă; $4a$, $-a$, $\frac{a}{2}(3 \pm i)$. e) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz - q)$; -3, 2, $\frac{1 + i\sqrt{23}}{2}$. f) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + q)$; $2i$, $3i$, $2 \pm \sqrt{10}$.

47. a) $m = 19$, rădăcinile: -3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$. b) $m = -2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$, rădăcinile:
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$. c) $m = 1$, rădăcinile: -2, 3, $\frac{1}{2}$. d) $m = 5$, rădăcinile: 2, 3, $\frac{1}{3}$, e) Polinomul dat se identifică cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + 3)$; $p_1 = -4$, $r_1 = 2$, $q_1 = -1$, $m_1 = -14$, rădăcinile: $2 \pm \sqrt{5}$, $-1 \pm i\sqrt{2}$; $p_2 = 2$, $r_2 = -4$, $q_2 = -1$, $m_2 = 10$; rădăcinile: 1, 3, $-1 \pm \sqrt{2}$. f) Identificare cu $(z^2 - 5z + a) \cdot (z^2 + bz + c)$; $a_1 = 3$, $b_1 = -3$, $c_1 = 2$, $m_1 = 20$; rădăcinile: $1, 2$ și $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$; $a_2 = \frac{10}{3}$, $b_2 = -3$, $c_2 = \frac{9}{5}$, $m_2 = \frac{302}{15}$; rădăcinile: $\frac{15 \pm \sqrt{105}}{6}$, $\frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{10}$.
g) Relația dată și primele două dintre relațiile lui Vieta dau rădăcinile -1, 3, 5, iar ultima relație dă $a = 15$ sau rădăcinile -5, $6 \pm i\sqrt{31}$, $a = 335$. h) Rădăcinile 3, 4, 5 și $a = 47$ sau rădăcinile 1, $\frac{11 \pm i\sqrt{119}}{2}$ și $a = 71$.

48. Polinomul dat se identifică cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + pz + r)$. a) Ecuațiile $p^2 + q + r = 0$, $p(q + r) = 8$ dau $p = -2$, $q + r = -4$; $q = -1$, $r = -3$ (sau invers); $a = -4$, rădăcinile: $1 \pm \sqrt{2}$, 3, -1. b) $1, 2 + i, 3, i$; $a = 10(1 + i)$.

49. a) Rădăcinile se notează: $\alpha, \alpha, \beta, \beta$; prima și a treia dintre relațiile lui Vieta dau $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ iar a doua și a patra dau $m = 0$, $n = 1$. *Altfel*: identificare cu
$(x^2 + px + q)^2$. b) Rădăcinile: $1, 1, i, i$; $m = 2(1 - i)$, $n = -1$.

50. Rădăcinile se notează cu α, $-\alpha$ și 2, $m = 3$, $n = 5$, rădăcinile: $2, -3, 3$. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + p)(x - 2)$.

51. V. recomandările de la 2.3.12. Prima dintre relațiile lui Vieta dă $z_4 = 5$, relația a 3-a dă $z_2 z_3 = -1$; rădăcinile: $2, 1, -1, 5$; a doua și a patra dintre relațiile lui Vieta dau $m = 9$, $n = -10$.

52. a) Dacă se ține seama de relația dată, $z_1 + z_2 = 0$, relațiile lui Vieta devin: $z_3 = -a$, $z_1 z_2 = b$, $z_1 z_2 z_3 = -c$. Valorile lui z_3 și $z_1 z_2$ date de primele două relații introduse într-a treia dau condiția necesară și suficientă: $c = ab$. Rădăcinile: $\pm\sqrt{-b}$, $-a$. Pentru exemplul numeric, se iau a și b după voie

de exemplu $a = 2$, $b = -4$ şi $c = ab$ $(= -8)$. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + p)\cdot(x + q)$.

b) Dacă se ţine seama de $z_1z_2 = 1$, relaţiile lui Vieta devin: $z_1 + z_2 + z_3 = -a$, $z_3(z_1 + z_2) = b - 1$, $z_3 = -c$; prima şi a treia relaţie dau $z_1 + z_2 = c - a$, iar a doua dă condiţia necesară şi suficientă: $c^2 - ac + b - 1 = 0$. Rădăcinile z_1 şi z_2 sînt date de ecuaţia $z^2 - (c - a)z + 1 = 0$. Pentru exemplul numeric, se iau a şi c arbitrari. *Altfel*: identificare cu $(x^2 + px + 1)(x - q)$.

c) Relaţiile date şi primele două dintre relaţiile lui Vieta dau $z_1 = -\frac{a}{2}$, $z_2z_3 = \frac{4b - a^2}{4}$; introducînd în relaţia a treia, se obţine condiţia necesară şi suficientă: $a^3 - 4ab + 8c = 0$. Rădăcinile z_2 şi z_3 se află cunoscînd suma lor, $-\frac{a}{2}$, şi produsul lor, $\frac{4b - a^2}{4}$. Pentru exemplul numeric, se pot lua a şi b arbitrari. *Altfel*: Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z + p)$.

d) Analog cu c); $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

e) $11a^2 = 36\,b$ şi $a^3 = 36c$. Pentru exemplul numeric, se ia a arbitrar, de preferinţă un multiplu de 6.

53. V. recomandările de la 2.3.12. a) Identificare cu $(z^2 + p)(z^2 + qz + r)$. Din prima, a 3-a şi a 4-a relaţie se scot q, p şi r — în ipoteza că $a \neq 0$; introducînd în relaţia a doua, se obţine condiţia necesară şi suficientă: $c^2 + a^2d - abc = 0$; $z_1, z_2 = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ z_3 şi z_4 sînt daţi de ecuaţia $cz^2 + acz + ad = 0$. Dacă $a = 0$, relaţia a 3-a dă $c = 0$, condiţie conţinută în cea precedentă. Pentru exemplul numeric, se iau a, b şi c arbitrari.

b) Identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + rz + q)$. Ultima dintre relaţiile obţinute dă $q = \pm\sqrt{d}$; înlocuind în relaţia a treia q prin această valoare şi $p + r$ prin a, se obţine condiţia necesară şi suficientă: $a^2d = c^2$ (b rămîne arbitrar). p şi r se află din primele două relaţii. Pentru exemplul numeric, se iau a şi d arbitrari (d de preferinţă pătrat perfect).

c) Identificare cu $(z^2 + pz + q)^2$. Prima şi a treia dintre relaţiile obţinute dau

$p = \frac{a}{2}$, $q = \frac{c}{a}$ (dacă $a \neq 0$); introducînd în relaţiile a doua şi a patra, se obţine condiţia necesară şi suficientă: $a^3 - 4ab + 8c = 0$ şi $c^2 = a^2d$. Dacă $a = 0$, relaţiile devin: $p = 0$, $2q = b$, $c = 0$, $q^2 = d$; în acest caz, condiţia este $b^2 - 4d = 0$ (ecuaţia devine bipătrată, realizantul $= 0$). Condiţia $a^3 - 4ab + 8c$ este aceeaşi ca la 2.3.8, iar condiţia $c^2 = a^2d$ este aceeaşi ca la problema precedentă. *Altfel*: rădăcinile se notează cu $\alpha, \alpha, \beta, \beta$ şi se folosesc formulele lui Vieta.

Explicaţie: $[(z_1 + z_2 = z_3 + z_4)$ şi $(z_1z_2 = z_3z_4)] \Rightarrow [(z_1 = z_2)$ şi $(z_3 = z_4)]$.

d) Identificare cu $(z^2 - pz + q)(z^2 - qz + p)$. Prima şi a patra dintre relaţiile obţinute dau $p + q = -a$, $pq = d$; relaţiile a doua şi a treia dau condiţia necesară şi suficientă: $a + b = d$ şi $a^2 + c = 2d$. Pentru a rezolva ecuaţia, se observă că p şi q sînt rădăcinile ecuaţiei $u^2 + au + d = 0$. Pentru exemplul numeric, se iau a şi b arbitrari.

e) Rădăcinile se notează cu α, 2α, β şi 2β. Prima şi a doua dintre relaţiile lui Vieta dau: $\alpha + \beta = -\frac{a}{3}$, $2\beta = \frac{9b - 2a^2}{45}$; introducînd în următoarele relaţii, se obţine condiţia necesară şi suficientă: $4a^3 - 18ab + 45c = 0$ şi $4(9b - 2a^2)^2 = 2\,025d$. Rădăcinile α şi β se află cunoscînd suma şi produsul lor. Pentru exemplul numeric, se iau a şi b arbitrari (de preferinţă a multiplu de 3). *Altfel*: identificare cu $(z^2 + pz + q)(z^2 + 2pz + 4q)$.

54. Se notează rădăcinile cu u, $-u$, v şi $-v$, şi se scriu prima şi a treia dintre formulele lui Vieta.

55. Sistemul este totdeauna compatibil, căci x, y, z sînt rădăcinile ecuaţiei $u^3 - au^2 + bu - c = 0$, care are o soluţie oricare ar fi $a, b, c \in C$.

56. x, y, z şi x, y, z, u sînt, respectiv, soluţiile ecuaţiilor $t^3 - pt^2 + qt - r$ şi $t^4 - at^3 + bt^2 - ct + d = 0$. În condiţiile problemei, polinomul al doilea este divizibil prin primul.

57. În fiecare dintre ecuaţiile (2) membrul stîng este simetric în raport cu oricare două dintre literele α, β şi γ. Rezultă că dacă, de exemplu, tripletul ordonat (3, 5, 8) este o soluţie a sistemului (2) în sensul că $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 8$, tripletul (5, 3, 8) este de asemenea o soluţie a sistemului (2), şi anume $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 8$. Acelaşi lucru se poate spune despre toate permutările elementelor (5, 3, 8). $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, deci cele 3 rădăcini ale ecuaţiei (1) dau 6 soluţii ale sistemului (2).

59. v. 2.4.7. a) $z_1 = z_2 = \frac{2}{3}$, $z_3 = -\frac{4}{3}$. b) $z_1 = z_2 = \sqrt{3}$, $z_3 = -2\sqrt{3}$. c) $z_1 = z_2 = 2 + i$, $z_3 = -4 - 2i$. d) $z_1 = z_2 = 1 + i$, $z_3 = -2 - 2i$.

60. v. 2.4.7 a) $z_1 = z_2 = z_3 = 2a$, $z_4 = -\frac{a}{3}$. b) $z_1 = z_2 = z_3 = i$, $z_4 = -i$. c) $z_1 = z_2 = z_3 = 2 + \sqrt{5}$, $z_4 = 1$.

61. a) Se pune condiţia $P(3) = P'(3) = 0$ sau identificare cu $(z - 3)^3(z - \alpha)$. $a = -4$, $b = -3$, $z_3 = -2$. b) $b = 1 - 4i$, $c = i$, $z_3 = -i$. c) $m = -7$, $n = 6$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$.

62. a) $a = 1$, rădăcinile: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1; $a = -1$, rădăcinile: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1. b) $a = 2i$, rădăcinile: $-i$, $-i$, $2i$; $a = -2i$, rădăcinile: i, i, $-2i$. c) $a = 3$, rădăcinile: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -3; $a = -\frac{605}{27}$, rădăcinile: $-\frac{11}{6}$, $-\frac{11}{6}$, $\frac{5}{3}$.

63. a) $a = -10$, $b = 3$, rădăcinile: 1, 1, 1, 3; $a = -8$, $b = 0$, rădăcinile: 2, 2, 2, 0. b) $a = b = 0$, rădăcinile: 0, 0, 0, -1; $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{16}$, rădăcinile: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. c) $a = 8$, $b = -3$, rădăcinile: 1, 1, 1, -3; $a = -8$, $b = -3$, rădăcinile: -1, -1, -1, 3.

64. Se pune condiţia $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ sau identificare cu $(z-2)^3 \cdot (z-\alpha)$. $p = 6$, $q = 4$, $r = -8$; $z_4 = -1$.

65. $P'(-3) = 0$ şi $P'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ dau un sistem de două ecuaţii cu necunoscutele a şi b; $a = 12$, $b = -56$, $c = -18$, $z = 2$. *Altfel*: identificare cu $(z+3)^2 (2z-1)(z-\alpha)$.

66. Identificare cu $(z-a)^3$, $p^2 = 3q$, $p^3 = 27r$, $z = -\frac{p}{3}$.

67. $p = -\frac{1}{3}$, $q = -\frac{2}{27}$, rădăcinile: $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

69. Mai trebuie spus că $P(a) = 0$ şi $P'''(a) \neq 0$.

70. Nu; $f(x) = 0$ nu este o ecuaţie algebrică.

71. Rădăcinile sînt aceleaşi, dar duble, multiple de ordinul k.

72. Ecuaţia este de forma $(z-a)^n (z-b)^n = 0$; se calculează derivata.

73. V. 2.4.9. $4p^3 + 27q^2 = 0, p < 0$; relaţia (4) de la 2.4.9 arată că rădăcina dublă are acelaşi semn cu q.

74. Dacă $P(z) = 0$ este de gradul n, $P'(z) = 0$ are $n-1$ rădăcini.

Dacă $P(z)$ este divizibil prin $P'(z)$, toate rădăcinile derivatei sînt rădăcini multiple ale ecuaţiei $P(z) = 0$ de ordin $\geqslant 2$. Aceasta este posibil numai dacă $n \geqslant 2(n-1)$, adică $n \leqslant 2$. Ecuaţia de gradul II este în acest caz de forma $a(x-\alpha)^2 = 0$.

76. $P(x) = (x-a)^k C(x)$, $C(a) \neq 0$. Se dau lui x valorile $x = a + h$ şi $x = a - h$ unde $h > 0$ şi suficient de mic încît polinomul $C(x)$ să păstreze în intervalul $[a-h, a+h]$ acelaşi semn şi se compară semnul expresiei $P(a-h) = (-h)^k C(a-h)$ cu semnul expresiei $P(a+h) = h^k C(a+h)$. Curba este tangentă la axa Ox în punctul a; ea traversează axa Ox (punct de inflexiune) sau a este un punct de extrem, după cum k este impar sau par.

78. 1) Împărţirea polinoamelor se face după procedeul obişnuit; pentru împărţirea coeficienţilor, se folosesc tabelele corespunzătoare. Dacă la împărţirea coeficienţilor se obţin două cîturi parţiale, lucrarea se continuă în ambele variante. Dacă primul coeficient al unui rest parţial nu se poate împărţi prin primul coeficient al împărţitorului, împărţirea polinoamelor nu se poate face. a) Cîtul $\hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{1}$, restul $\hat{2}$. b) Cîtul $x^2 + \hat{2}x + \hat{5}$, restul $\hat{3}$. c) Cîtul $\hat{4}x + \hat{2}$, restul

$\hat{5}$ sau cîtul $\hat{4}x + \hat{5}$, restul $\hat{2}$. d) Cîtul $\hat{2}x + \hat{1}$, restul $\hat{2}$ sau cîtul $\hat{2}x + \hat{5}$, restul $\hat{6}$ sau cîtul $\hat{2}x + \hat{9}$, restul $\widehat{10}$.

2) Dacă împărțitorul este de forma $x - a$, demonstrația de la 1.3.3 rămîne valabilă oricare ar fi clasa de resturi căreia îi aparțin coeficienții polinoamelor. În locul relației (4) de la 1.3.3 se obține gr. $(x - a)(C - C') \geqslant 1$, căci primul termen al acestui produs se obține înmulțind x cu primul (eventual unicul) termen din $C - C'$, iar în locul relației (5) se obține gr. $(R' - R) = 0$, sau, $R' - R$ este polinomul nul, căci R 'și R sînt constante.

În cazul unui împărțitor oarecare, demonstrația de la 1.3.3 nu mai este valabilă, căci nu mai sîntem siguri de relația (4): dacă coeficienții polinoamelor aparțin unei clase de resturi cu divizori ai lui zero, cum este Z_6 sau Z_{12}, se poate întîmpla ca gradul produsului $I(C - C')$ să fie mai mic decît gradul lui I. De exemplu, în Z_6 $(\hat{3}x^2 + \hat{5}x + \hat{2}) \cdot \hat{2} = \hat{4}x + \hat{4}$ — produsul este de grad mai mic decît primul factor (v. cap. I, problema 8 și 37.)

Exemplele c) și d) arată că dacă Z_4 are divizori ai lui zero, teorema de la 1.3.3 nu este adevărată.

79. Da, oricare ar fi n. Procedeul de împărțire obișnuit se poate folosi totdeauna, căci pentru a obține coeficienții cîtului se împarte mereu coeficientul primului termen al restului parțial prin $\hat{1}$, și în orice Z_n, oricare ar fi a, $\hat{a} : \hat{1} = \hat{a}$.

80. 1) a) $\hat{1}$, $\hat{2}$. b) $\hat{1}$, $\hat{2}$. c) $\hat{0}$, $\hat{5}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$. d) $\hat{0}$, $\hat{6}$, $\hat{2}$, $\hat{4}$. e) $\hat{0}$, $\hat{7}$, $\hat{2}$, $\hat{5}$. f) $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$, $\widehat{11}$. 2) Teorema despre numărul rădăcinilor unei ecuații algebrice se bazează pe descompunerea în factori liniari, care, la rîndul ei, se bazează pe teorema fundamentală a algebrei. Or, clasele de resturi, înzestrate cu adunarea și înmulțirea nu sînt algebric închise (exemple: ecuația $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ cu coeficienți din Z_3 n-are nici o rădăcină, de asemenea ecuația $\hat{x^2} + x + \hat{1} = \hat{0}$ cu coeficienți din Z_n), de aceea demonstrația ei nu este valabilă în cazul ecuațiilor cu coeficienți în Z_n. 3) Fiindcă în Z_6, Z_8, Z_{10} și Z_{12} există divizori ai lui zero (v. 1.2.3, obs. 2). 4) Dacă a este o rădăcină a ecuației, polinomul se împarte prin $x - \hat{a}$, care este egal cu $x + \widehat{n - a}$. a) $\hat{2}(x + \hat{1})(x + \hat{2})$. b) $(x + \hat{4})(x + \hat{3})(\hat{2}x + \hat{1})$. c) $x(x + \hat{1})$ sau $(x + \hat{4})(x + \hat{3})$. d) $x(x + \hat{2})$ sau $(x + \hat{6})(x + \hat{4})$. e) $x(x + \hat{3})$ sau $(x + \hat{8})(x + \hat{5})$. f) $(x + \widehat{10})(x + \hat{9})$ sau $(x + \hat{6})(x + \hat{1})$. În cazurile a) și b) descompunerea este unică, căci în Z_3 și Z_5 nu există divizori ai lui zero; demonstrația de la 2.2.7 rămîne valabilă (și simplificările sînt permise; v. nota de la 2.2.4). În cazul ecuațiilor c) — f) situația este alta. Deoarece în Z_6, Z_8, Z_{10} și Z_{12} există divizori ai lui zero, împărțirea nu este unică, deci nota de la 2.2.4 nu se aplică, din $AB = AC$ nu rezultă $B = C$, simplificările nu sînt permise și demonstrația de la 2.2.7 cade. 5) În Z_6, Z_8 și Z_{10}, există divizori ai lui zero; din $P(x) = (x + \hat{a})(x + \hat{b})$, $\hat{c} + \hat{a} \neq \hat{0}$, $\hat{c} + \hat{b} \neq 0$ nu rezultă că $P(\hat{c}) \neq \hat{0}$ (v. nota de la 2.2.8).

CAPITOLUL III

1. a) $z_2 = 4 + i$, $z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$. b) $z_2 = -i$, $z_3 = \sqrt{5}$, $z_4 = 2\sqrt{5}$.

2. a) V.3.1.9. $a = -30$, $b = -27$; rădăcinile: $-1 \pm i\sqrt{2}$, $2 \pm \sqrt{13}$, b) $a = -36$, $b = 113$; rădăcinile: $\frac{5 \pm 2i}{2}$, $2 \pm \sqrt{3}$. Dacă nu se pune condiția ca coeficienții să fie reali, nu avem dreptul să aplicăm teorema de la 3.1.5.

3. a) Teorema de la 3.1.5. nu se poate aplica, deoarece nu s-a cerut ca a să fie real. $P(2 + i) = 0$ dă $a = -5 - i$; rădăcinile: $2 + i$, 1 și 2. b) Imposibil.

4. Se împarte (Horner) polinomul dat prin $z - (1 - i)$; celelalte rădăcini sînt $2 \pm \sqrt{3}$.

5. Cînd se trece de la $P(u)$ la $P(\bar{u})$, în fiecare termen al polinomului, $a_k z^{n-k}$, în locul factorului z^{n-k} apare $\overline{z^{n-k}}$, iar a_k rămîne neschimbat. Ca să putem aplica teorema (I) de la 3.1.5., ar trebui să înlocuim, și a_k prin $\bar{a}_k$ dar $a_k = \bar{a}_k$ dacă și numai dacă a_k este real.

6. Dacă rădăcinile imaginare ale unei ecuații algebrice sînt: conjugate două cîte două și unul dintre coeficienții săi este real, toți coeficienții ecuației sînt reali (v. cap. II, problema 31).

8. a) $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$. b) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$.

9. V. 3.1.8. a) $m = -3$, $n = 2$; $2 \pm \sqrt{2}$, $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. b) $m = -1$, $n = -2$; $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{2}$ și 1. Cînd nu se cere ca parametrii să fie raționali, ei nu se pot determina; v. problema 2.

10. Se pune condiția ca $1 + \sqrt{2}$ să satisfacă ecuația: $a = 2$, $x_{2,3} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$.

11. Rădăcinile ecuației vor fi $a + \sqrt{2}$, $a - \sqrt{2}$ și α. Se identifică polinomul dat cu $(x^2 - 2ax + a^2 - 2)(x - \alpha)$.
a) $a = 3, m = -21, \alpha = 3$; rădăcinile: 3 și $3 \pm \sqrt{2}$; b) $a = 3, \alpha = -2, m = 14$, rădăcinile: -2 și $3 \pm \sqrt{2}$; $a = -\frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{14}{3}$, $m = \frac{238}{27}$; rădăcinile: $\frac{14}{3}$ și $-\frac{1}{3} \pm \sqrt{2}$.

12. Polinomul dat se identifică cu $(x^2 - 6x - 2)(x^2 - 4x + 9)(x^2 + ax + b)$; $m = -10$, $n = 22$, $p = 14$, $q = 2$; $3 \pm \sqrt{11}$, $2 \pm \sqrt{5}$, $\pm i$.

13. Polinomul dat se identifică cu polinomul care se obţine efectuînd $2(x^2 - 10x + 28)(x^2 - 2x - 1)(x^2 + px + q)$. Se obţin 6 ecuaţii, ecuaţia a patra şi a şasea dau p şi q, iar celelalte dau cei 4 coeficienţi a, b, c, d.

14. a) Polinomul dat se identifică cu polinomul care se obţine efectuînd $(x - 1 - i\sqrt{3}) \cdot (x - 1 + i\sqrt{3})(x - \alpha)(x - 2\alpha)(x - \gamma)$. Se obţin 5 ecuaţii; din primele două se află α şi γ, iar ultimele 3 ecuaţii dau a, b şi c.

15. Identificare cu $(x^2 - 6x + 13)(x - u)^2(x^2 + px + q)$.

18. Aceleaşi derivate pe care le anulează $a + bi$ le anulează şi $a - bi$.

19. Se ţine seama de teorema de la 3.1.5. b) Este par.

20. Nu. Propoziţia este adevărată numai în cazul unei ecuaţii cu coeficienţi reali. c) Numai în cazul unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali; contraexemplu: $z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 2 = 0$.

21. Nu. Demonstraţia printr-un contraexemplu.

23. a) Două rădăcini întregi şi $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. b) Trei rădăcini întregi şi $x^3 - x + 2 = 0$. c) Trei rădăcini întregi şi $\frac{-1 \pm i\sqrt{47}}{4}$. d) Se împarte prin a^4 şi se pune $\frac{x}{a} = y$; rădăcinile: a, $6a$, $-2a$, $-5a$. e) $\sqrt{3}$ apare numai în coeficienţii puterilor impare ale lui x; se pune $x = y\sqrt{3}$; rădăcinile: $6\sqrt{3}$, $-7\sqrt{3}$, $\sqrt{3}(1 + i)$. f) Trei rădăcini întregi şi $2 \pm i$.

24. Propoziţia de la 3.3.7 nu se poate aplica aici, fiindcă nu toţi coeficienţii ecuaţiei sînt întregi; $x = 2$.

25. a) Rădăcina întreagă poate fi numai 1 sau -1, deci $a = -4$ sau $a = 2$. b) a este nedeterminat; ecuaţia admite rădăcina întreagă r, dacă $a = -\frac{2r^4 + r^3 + 1}{r}$

26. v. problema precedentă; $p + q = 0$ sau $p - q = 2$.

27. Fie αx^k singurul termen al cărui coeficient nu este raţional, iar $r \in Q$ o rădăcină raţională. $P(r)$ este o sumă în care toţi termenii afară de unul sînt raţionali, deci...

29. v. problema 21.

30. În propoziţia de la 3.3.9 se ia $q = 1$.

31. a) Două rădăcini fracţionare şi $-2 \pm \sqrt{3}$. b) Două rădăcini fracţionare şi $-1 \pm i\sqrt{3}$. c) v. problema 23 d); rădăcinile $\frac{m}{2}$, $-\frac{m}{4}$ $-\frac{2m}{3}$, $m(-2 \pm \sqrt{3})$.

d) Două rădăcini fracţionare şi $x^3 + a^2x + a^3 = 0$. e) Trei rădăcini fracţionare şi $2 \pm \sqrt{3}$.

33. Atenţie la coeficientul lui x^3.

34. a) Una dintre necunoscute se elimină prin metoda substituţiei, apoi se caută rădăcinile raţionale ale ecuaţiei obţinute.

$$x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ x_{2,3} = \frac{47 \pm \sqrt{123}}{7}\quad y_{2,3} = \frac{-31 \mp 2\sqrt{123}}{7}.$$

b) v. indicaţia de la a); $(1, -3)$, $\left(-2, -\frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{1 \pm i\sqrt{51}}{2}, \frac{1 \mp i\sqrt{51}}{2}\right)$; intersecţia a două parabole; c) Se folosesc formulele lui Vieta; sînt 6 soluţii; $\{x, y, z\} = \{2, 5, -4\}$. d) V. indicaţia de la c); sînt 24 de soluţii, $\{x, y, z, u\} = \left\{-2, 3, \frac{-1 - i\sqrt{19}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}\right\}$. e) Se elimină întîi y^2 pentru a obţine o ecuaţie liniară în y; soluţiile $(0, 1)$, $(-2, 0)$ şi două soluţii imaginare, intersecţia unei elipse cu un cerc. f) $(-2, -1)$, $(-2, -1)$, $\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$, $(1, 3)$; intersecţia unei parabole cu o elipsă. g) $(3, 1)$, $(1, 2)$ şi două soluţii imaginare; intersecţia unei elipse cu o parabolă.

35. Nu, căci 1 ar fi divizibil prin numitorul fracţiei; v. 3.3.9.

36. V. problema 25. Rădăcina nu poate fi decît $\frac{1}{2}$ sau $-\frac{1}{2}$; $m = -2$ sau $m = 1$.

37. $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Se examinează cazul cînd p este par şi cazul cînd p este impar; în ambele cazuri, numărătorul este par.

38. a) Dacă se împarte polinomul $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ prin $x - \frac{q}{q}$ folosind schema lui Horner, se obţin coeficienţii cîtului: $c_0 = a_0$, $c_1 = \dfrac{a_0p + a_1q}{q}$, $c_2 = \dfrac{a_0p^2 + a_1pq + a_2q^2}{q^2}, \ldots, c_{n-1} = \dfrac{a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}}{q^{n-1}}$.

Dacă $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, are loc relaţia (α) de la 3.3.9. Procedînd ca la 3.3.9 b), se arată că a_0 este divizibil cu q, $a_0p + a_1q$ este divizibil prin $q^2, \ldots a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_nq^{n-1}$ este divizibil prin q^{n-1}, deci numărătorii fracţiilor care dau $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ sînt divizibili prin numitorii respectivi. b) Mai mult, fiecare numărător este divizibil printr-o putere a lui q care este cu 1 mai mare decît puterea lui q care figurează în numitorul aceleiaşi fracţii. Rezultă că numerele întregi care se obţin după simplificare sînt divizibile cu q. (Se poate lua cazul $P(x) = a_0x^4 + \ldots + a_4$.)

39. Se foloseşte formula $S_2 = \frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$ $n = 10$. **40.** Primul termen este 4 sau $\frac{-5 \pm i\sqrt{59}}{2}$. **41.** Raţia = 4. **42.** 5; 7; 9.

43. $(2x + 9)\sqrt{x(x + 9)} = 90$; $x = 3$. **44.** $2x^6 + 6x^5 + 7x^4 + 4x^3 + x^2 - 3600 = 0$, x fiind lungimea laturii mai mici. **45.** $x^3 - 24x + 45 = 0$, x fiind măsura razei cilindrului. **46.** $x^3 + 15x^2 - 756 = 0$.

47. Da. Descompunerea în factori liniari este unică (v. 2.2.7); grupînd la un loc cîte doi factori care corespund rădăcinilor imaginar conjugate, se obţine descompunerea în factori reali ireductibili. Nici o altă grupare nu va da factori reali (v. Cap. I, probl. 9). *Altfel*: Se reface demonstraţia de la 2.2.7.

50. a) Termenii fracţiilor se descompun în factori folosind 3.3.7 şi 3.3.9. a) $\frac{2x - 1}{x - 3}$; b) $\frac{x^2 + x + 2}{3x - 2}$; c) $\frac{4x + 3}{3x - 2}$.

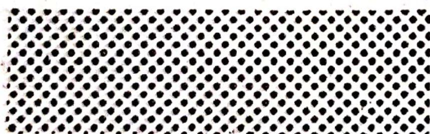
d) Fracţia este ireductibilă.

51. Propoziţia: Orice polinom cu coeficienţi raţionali se poate descompune în factori liniari şi de gradul II cu coeficienţi raţionali — este falsă. Ea devine adevărată dacă se adaugă condiţiile următoare: rădăcinile reale ale polinomului să fie raţionale sau iraţionale pătratice, iar dacă polinomul are rădăcina imaginară $a + bi$, a şi b^2 să fie raţionali.

54. N-are nici un sens. Numerele complexe nu sînt nici pozitive, nici negative.

55. Are acelaşi semn cu a_0 oricare ar fi x, căci se descompune în trinoame cu rădăcini imaginare. *Altfel*: v. nota de la 3.4.5.

56. a) Da, pentru orice funcţie continuă (v. 4.2.2). b) Depinde de ordinul de multiplicitate a rădăcinii (v. cap. II, probl. 76).



CAPITOLUL IV

1*. a) $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$. b) $(3, \infty)$. c) $(-\infty, -1)$. d) $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

2. a) $(-\infty, +\infty)$. b) $(0, 5)$, $(5, \infty)$. c) $(-\infty, \sqrt{5})$. d) $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \infty)$. e) Se caută rădăcinile raţionale ale derivatei; $(-\infty, -2)$, $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. $(3, \infty)$. f) Se caută rădăcinile raţionale ale derivatei; $(-\infty, -3)$.

* Dacă se indică, de exemplu, trei intervale, înseamnă că ecuaţia are trei rădăcini reale, cîte una în fiecare interval.

(2, 4), (4, ∞). g) Se poate trata ecuaţia care se obţine după îndepărtarea rădăcinii duble; $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-7 \pm 4\sqrt{13}}{3}$.

h) Rădăcinile derivatei sînt $\frac{21 \pm \sqrt{937}}{2}$. Deoarece nu interesează valoarea polinomului pentru aceste valori ale lui x, ci numai semnul lui, se pot lua aproximări foarte grosiere, de exemplu $x_1 = -4$, $x_2 = 25$. Ecuaţia are cîte o rădăcină reală în intervalele $(-\infty, -4)$, $(-4, 25)$, $(25, \infty)$.

3. Se aplică metoda de la 4.1.4 a) Intersecţia părţii superioare a hiperbolei $(x-1)^2 - y^2 = 1$ cu parabola $y = 9 - x^2$; $x_1 \in (2, 3)$, $x_2 \in (-2, -3)$. b) Figura I reprezintă graficul funcţiei $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}$, $x \in [-1, \infty)$; $M(0, 2)$, $A(2, 0)$; în punctul 2 funcţia nu este derivabilă, derivata la stînga este $-\sqrt{3}$, derivata la dreapta este $\sqrt{3}$. Rădăcinile sînt abscisele punctelor B, C şi D; $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 2)$, $x_3 \in (2, \infty)$. c) V. figura I. $x \in (1, 2)$, abscisa punctului E. d) Graficul funcţiei $f(x) = |x^4 - 1|$ se vede în figura II. $x_1 \in (-\infty, -1)$, $x_2 \in (1, \infty)$.

4. a) Graficul arată că ecuaţia admite o rădăcină negativă şi două rădăcini pozitive (ramura dreaptă a parabolei $y = 3x^2$ taie curba exponenţială $y = 2^x$ în două puncte; $\left(\text{demonstraţie: } \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{3x^2} = \infty\right)$. Se constată prin încercări că ele se află, respectiv în intervalele (0, 1) şi (7, 8). b) $x_1 \in (1, 2)$, $x_2 \in (9, 10)$. c) $x_1 = 0$ şi cîte o rădăcină în intervalele $\left(-2k\pi - \frac{\pi}{2}, -2k\pi\right)$. $k = 0, 1, 2, \ldots$ ... şi $\left(-2k\pi, -2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ d) $x_1 = 0$, $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. e) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. f) $x \in (0, 1)$. g) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

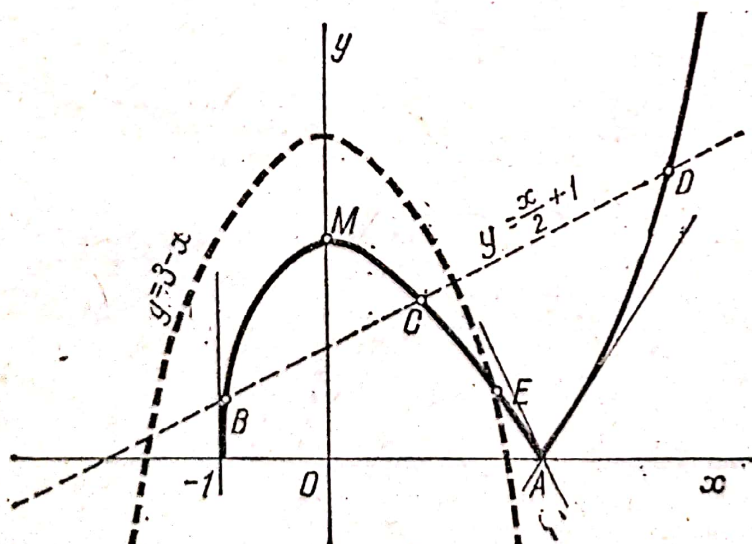


Fig. I.

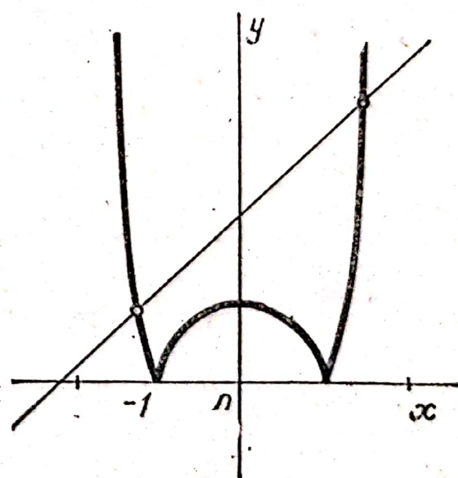


Fig. II.

h) Cîte o rădăcină reală în intervalele... $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, adică în intervalele $\left(-k\pi, -(2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

5. a) Se intersectează cele două curbe, sau se elimină y şi se studiază ecuaţia $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$; o singură soluţie: $x \in (-1, 0)$, $y \in (1, 2)$. b) Analog cu a); două soluţii; $x_1 \in (-1, 0)$, $y_1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x_2 \in (0,1)$, $y_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. c) x, y şi z sînt rădăcinile ecuaţiei $t^3 - 12t + 7 = 0$, care, admite cîte o rădăcină în intervalele $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$. Fie t_1, t_2, t_3 rădăcinile acestei ecuaţii. Soluţiile sistemului sînt toate permutările acestor numere.

6. a) $a < -8$, $(5, \infty)$; $a = -8$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 8$; $-8 < a < 100$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$, $(5, \infty)$; $a = 100$, $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = -4$; $a > 100$, $(-\infty, -1)$. b) $a < 0$, $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; $a = 0$, $x_1 = x_2 = 0$; $x_3, x_4 = \pm\sqrt{2}$; $0 < a < 1$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$; $a = 1$, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = x_4 = 1$; $a > 1$, nici o rădăcină reală. c) Dacă se foloseşte teorema lui Rolle, ea trebuie aplicată în intervalul $[0, \infty)$. $a < 0$, $x \in (1, \infty)$, $a = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $0 < a < \frac{1}{4}$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$; $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{4}$; $a > \frac{1}{4}$, nici o rădăcină.

7. Se foloseşte metoda grafică (4.1.4).

a) $f(x) = \frac{3(x+1)}{x^2 + x + 1}$, $x \in R$ (fig. III), $m(-2, -1)$. $M(0, 3)$. Discuţia se poate face şi pe cale elementară, folosind realizantul, suma şi produsul rădăcinilor.

b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$, $x \in R \setminus \{1\}$ (fig. IV). $M\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $x \in R \setminus \{0\}$ (fig. V), $m\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$; d) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^3 - 3x + 2}$, $x \in R \setminus \{-2, 1\}$ (fig. VI) $A(0, 1)$.

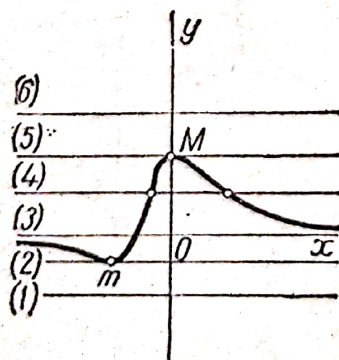


Fig. III.

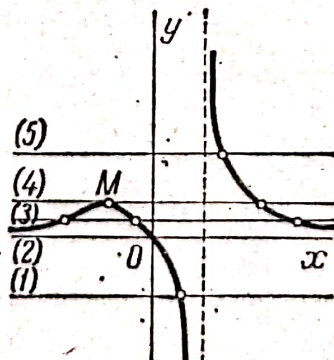


Fig. IV.

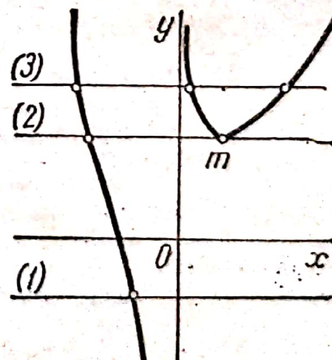


Fig. V.

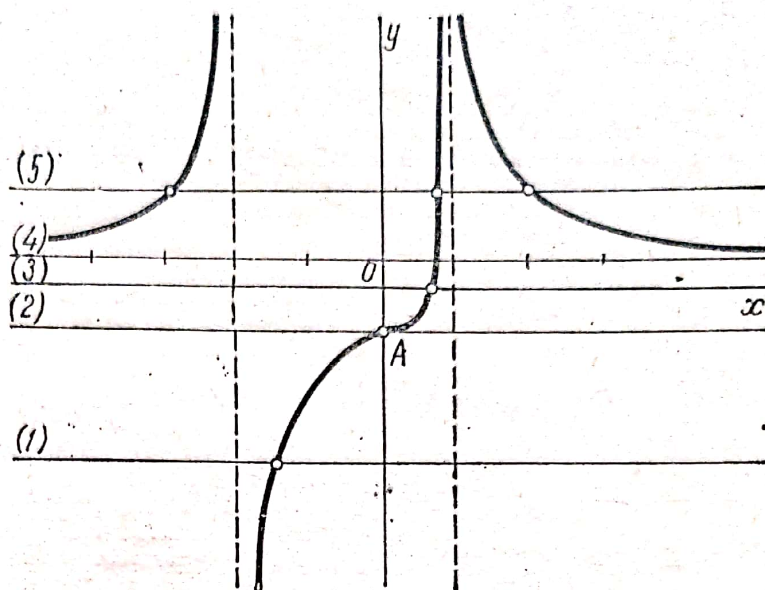


Fig. VI.

8. a) Se taie curba $y=e^x-x$ cu dreapta mobilă $y=m$ sau se taie curba $y=e^x$ cu dreapta mobilă $y=x+m$. Discuția: $m<1$, nici o rădăcină reală; $m=1$, $x=0$ (se va afla ecuația tangentei la curba $y=e^x$ în punctul de abscisă zero); $m>1$, $x_1\in$ $\in(-\infty, 0)$, $x_2\in(0, \infty)$. b) Analog cu a). $m<-1$, $x_1\in$ $\in(0,1)$, $x_2\in(1,\infty)$; $m=-1$, $x=1$, $m>-1$, nici o rădăcină reală. c) Se taie sinusoida cu dreapta variabilă $y=x+$ $+m$. Discuție: $m<0$, $x\in$ $\in(0, \infty)$; $m=0$, $x=0$; $m>0$, $x\in(-\infty, 0)$. d) La fel ca problema precedentă. e) Se taie curba $y=\frac{3^x}{x^2}$ cu dreapta variabilă $y=m$; $m\leqslant 0$, nici o rădăcină; $0<m<\frac{e^2\ln^2 3}{4}$, $x\in(-\infty, 0)$ ş.a.m.d. f) Oricare ar fi m, $x_1=0$; afară de aceasta: $m<0$, cîte o rădăcină în... $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} 2\pi\right)$..., adică $\left(-k\pi, -(2k-1)\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, k\pi\right)$ $k=1,2,3,\ldots$; $m=0$, $x=k\pi(k\in Z)$; $0<m\leqslant 1$, cîte o rădăcină în intervalele... $\left(-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}-\pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$..., adică $\left.\right)-(2k+$ $+1)\frac{\pi}{2}, -k\pi\Big)$ şi $\left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k=1, 2, 3, \ldots$; $m>1$, cîte o rădăcină în aceleaşi intervale, la care se adaugă cîte o rădăcină în intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

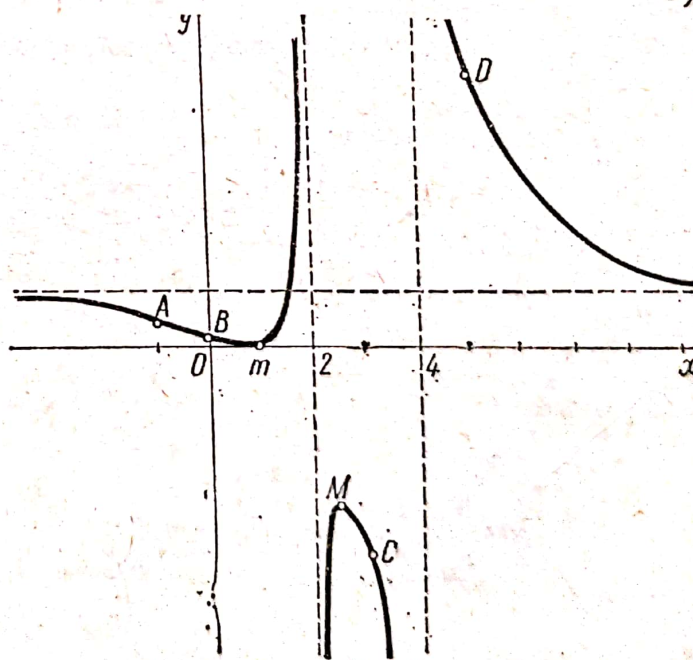


Fig. VII.

şi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. g) V. 4.1.8. (două metode). $m < 0$, $x \in (0, 1)$; $m = 0$, $x = 1$; $0 < m < \frac{1}{e}$, $x_1 \in (1, e)$, $x_2 \in (e, \infty)$; $m = \frac{1}{e}$, $x = e$; $m > \frac{1}{e}$, nici o rădăcină. h) $m \leqslant 0$, $x = 0$; $0 < m < 1$, $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$ $x_3 = 0$; $m > 1$, $x = 0$. i) $m < -\frac{\pi}{2} + 1$, nici o rădăcină; $-\frac{\pi}{2} + 1 \leqslant m \leqslant 0$, $x \in [-1, 0]$;

$0 < m \leqslant \frac{\pi}{2} - 1$, $x \in (0, 1]$; $m > \frac{\pi}{2} - 1$, nici o rădăcină.

9. Se procedează ca la 4.1.9. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$ $x \in R \setminus \{2, 4\}$; graficul este cel din figura VII, $m(1, 0)$, $M\left(\frac{5}{2}, -3\right)$, $A\left(-1, \frac{4}{15}\right)$, $B\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $C(3, -4)$, $D\left(5, \frac{16}{3}\right)$.

a) Interesează restricţia funcţiei f pe intervalul $[-1, 1]$, graficul ei este arcul Am. Discuţie: $a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x = 1$; $0 < a \leqslant \frac{4}{15}$, o rădăcină; $a > \frac{4}{15}$, nici o rădăcină. b) Interesează restricţia al cărei grafic este arcul situat între axa Oy (punctul B) şi asimptota $x = 2$. Discuţie: $a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x = 1$; $0 < a < \frac{1}{8}$, două rădăcini; $a = \frac{1}{8}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{10}{7}$; $a > \frac{1}{8}$, o rădăcină. c) Interesează restricţia al cărei grafic este cuprins între punctele C şi D. Discuţie: $a < -4$, $x \in (3, 4)$; $a = -4$, $x = 3$; $-4 < a < \frac{16}{3}$; nici o rădăcină; $a = \frac{16}{3}$, $x = 5$; $a > \frac{16}{3}$, o rădăcină.

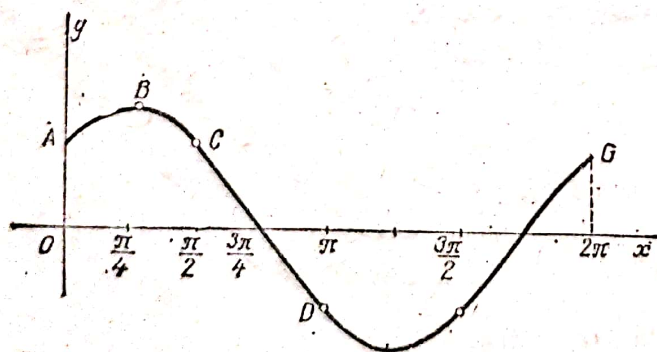


Fig. VIII.

10. Figura VIII reprezintă graficul funcţiei $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi)$, $A(0, 1)$, $B\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ş.a.m.d.

a) Interesează restricţia funcţiei f pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, graficul ei este arcul ABC. Discuţie : $a < 1$, nici o rădăcină; $a = 1$, $x_1 =$

$= 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$; $1 < a < \sqrt{2}$, două rădăcini; $a = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$; $a > \sqrt{2}$, nici o rădăcină.

b) Interesează restricția al cărei grafic este arcul CD. Discuție: $a < -1$ sau $a > 1$, nici o rădăcină; $-1 \leqslant a \leqslant 1$, o singură rădăcină. c) Analog cu a). d) Analog cu b).

11. Se procedează ca la 4.1.9. $f(x) = \frac{5x^3}{5x^2 - 2x - 3}$, $x \in R \setminus \left\{-\frac{3}{5}, 1\right\}$ (fig. IX), $M\left(-1, -\frac{5}{4}\right)$, $m\left(\frac{9}{5}, \frac{243}{80}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{22}\right)$. a) Interesează restricția reprezentată pe ramura stîngă a curbei și de ramura mijlocie pînă la punctul O. Discuție: $a < -\frac{5}{4}$, două rădăcini; $a = -\frac{5}{4}$, $x_1 = x_2 = -1$; $-\frac{5}{4} < a < 0$, nici o rădăcină; $a = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $a > 0$, o rădăcină. b) Interesează restricția reprezentată de partea din ramura stîngă situată la dreapta punctului M și din ramura mijlocie. c) $a < -\frac{5}{22}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $a = -\frac{5}{22}$, $x = \frac{1}{2}$; $-\frac{5}{22} < a < \frac{243}{80}$, nici o rădăcină; $a = \frac{243}{80}$, $x_1 = x_2 = \frac{9}{5}$; $a > \frac{243}{80}$, două rădăcini.

12. Cazul $p < 0$, $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$, 3 rădăcini reale, $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, \infty\right)$; $\Delta = 0$, rădăcină dublă; $\Delta > 0$, o singură rădăcină reală (v. 2.4.9).

13. a) Fie O centrul sferei, C centrul bazei conului, A vîrful conului, A' punctul de pe sferă diametral opus lui A. Notăm cu x măsura algebrică a vectorului $\vec{OC}$ pe axa OA' (orientată de la O spre A'). Înălțimea conului este $R + x$, oricare ar fi poziția punctului C pe AA'. Ecuația problemei:

$$f(x) = -\frac{x^3 + R^2x - R^2x - R^3}{3} = V,$$

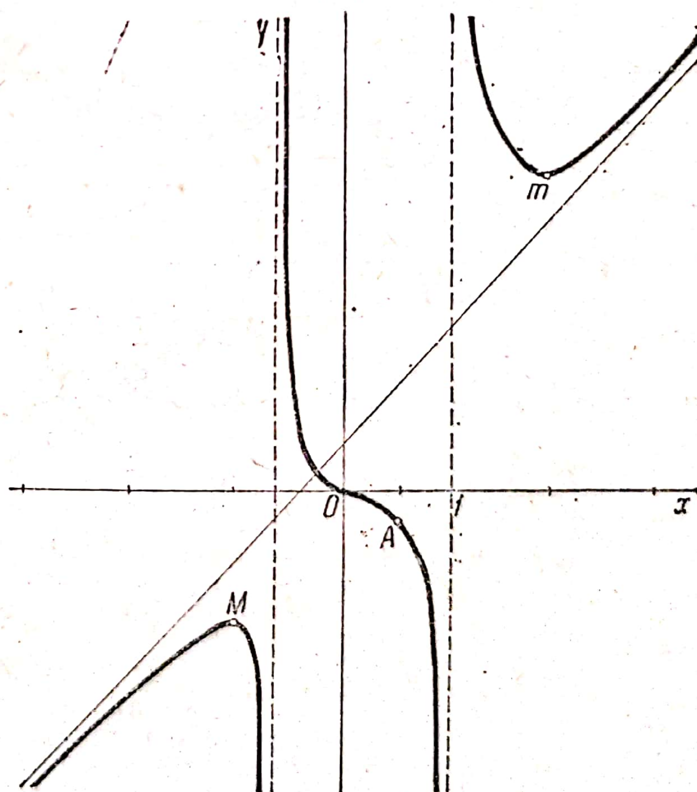


Fig. IX.

$x \in [-R, R]$. Figura X reprezintă graficul funcţiei definită de aceeaşi relaţie, dar pentru $x \in (-\infty, \infty)$; $m(-R, 0)$, $P\left(0, \frac{R^3}{3}\right)$, $M\left(\frac{R}{3}, \frac{32R^3}{81}\right)$, $Q(R, 0)$; interesează restricţia acestei funcţii pe intervalul $[-R, R]$; graficul ei este arcul $mPMQ$. Curba se taie cu dreapta variabilă $y = V$ $(V \geqslant 0)$. Discuţie: $0 \leqslant V < \frac{32R^3}{81}$, $x_1 \in \left(-R, \frac{R}{3}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{R}{3}, R\right)$; $V = \frac{32R^3}{81}$, $x_1 = x_2 = \frac{R}{3}$; $V > \frac{32R^3}{81}$, nici o soluţie. b) Interesează numai arcul de curbă PMQ. $0 \leqslant V < \frac{R^3}{3}$, o singură soluţie $x \in \left(\frac{R}{3}, R\right)$; $\frac{R^3}{3} \leqslant V < \frac{32R^3}{81}$, două soluţii ş.a.m.d. c) Pentru a obţine o ecuaţie cu coeficienţi numerici, se pune $x = z^3R$; $x_1 = \frac{R}{4}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{69}}{8}$. *Altfel*: se ia ca necunoscută unghiul format de înălţimea conului cu o generatoare.

14. a) Se notează cu x „distanţa“ de la centrul cercului la o latură a triunghiului (v. problema 13). $f(x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2} = S$, $x \in [-R, R]$. v. figura XI, $A(-R, 0)$, $B(R, 0)$, $M\left(\frac{R}{2}, \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}\right)$. b) $x_1 = 0$, $x_2 \in (0, 8R, 0, 9R.)$

15. Fie $y = u$ ordonata corzii, $s = f(u) = \frac{a}{b}(b + u)\sqrt{b^2 - u^2}$, $u \in [-b, b]$ Dacă scriem x în loc de u şi R în loc de b, expresia diferă de cea din problema precedentă numai prin factorul $\frac{a}{b}$. Graficul are forma din figura XI; $A(-b, 0)$, $B(b, 0)$, $M\left(-\frac{a}{2}, \frac{3ab\sqrt{3}}{4}\right)$.

16. a) Notăm cu x distanţa de la vîrful conului la baza superioară a cilindrului; $f(x) = \frac{R^2x^2(h - x)}{h^2} = V$, $x \in [0, h]$. Curba $y = f(x)$ are aceeaşi alură cu cea din figura X. Extremele sînt O şi $M\left(\frac{2h}{3}, \frac{4R^2h}{27}\right)$, curba taie Ox în punctul $Q(h, 0)$, interesează arcul OMQ. b) $x_1 = \frac{h}{3}$, $x_2 = \frac{h}{3}(1 + \sqrt{3})$.

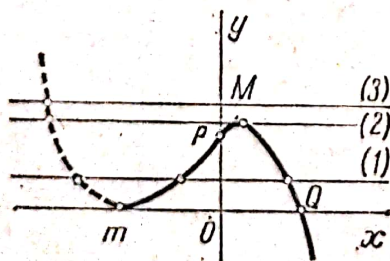


Fig. X.

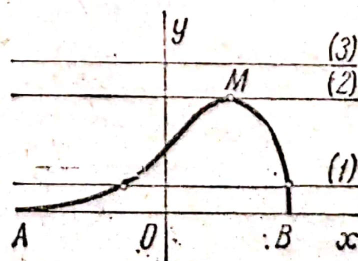


Fig. XI.

17. a) Fie x înălţimea conului; $V = f(x) = \frac{x}{3}(a^2 - x^2)$, $x \in [0, a]$. Discuţie: $0 \leqslant V < \frac{2a^3\sqrt{3}}{27}$, două soluţii; $V = \alpha$, $x_1 = x_2 \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $V > \alpha$, nici o soluţie. b) $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{(a\sqrt{13} - 1)}{4}$. *Altfel:* se ia ca necunoscută unghiul α format de înălţimea conului cu o generatoare $V = f(\alpha) = \frac{a^3 \cos\alpha \sin^2\alpha}{3}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Fie x şi y, respectiv, raza şi generatoarea conului: sistemul $\pi xy = \pi S$, $\frac{\pi x^2}{3} \cdot \sqrt{y^2 - x^2} = \pi V$ dă ecuaţia $V = f(x) = \frac{x}{3}\sqrt{S^2 - x^4}$, $x \in [0, \sqrt{S}]$. Graficul acestei funcţii este arcul OMA din figura XII, $M\left(\sqrt[4]{\frac{S^2}{3}}, \frac{S}{9}\sqrt{2S\sqrt{3}}\right)$, $A(\sqrt{S}, 0)$. *Altfel:* Se iau ca necunoscute generatoarea x şi unghiul α format de generatoare cu înălţimea: $V = \frac{S\sqrt{S}}{3}\sqrt{\cos\alpha \sin^2\alpha}$.

19. a) Sistemul $x^2y = V$, $2x^2 + 4xy = S$ dă ecuaţia $f(x) = \frac{2x^3 + 4V}{x} = S$, $x \in (0, \infty)$. Graficul acestei funcţii este ramura dreaptă a curbei din figura XIII, $M(\sqrt[3]{V}, 6\sqrt[3]{V^2})$. În ecuaţia $f(x) = \frac{17\sqrt[3]{V^2}}{2}$ se pune $x = z\sqrt[3]{V}$; $x_1 = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt[3]{V}(\sqrt[3]{65} - 1)}{4}$. Valorile corespunzătoare ale lui y se află din relaţia $x^2y = V$. *Altfel:* Ecuaţia $f(x) = S$ se rezolvă în raport cu y şi se construieşte curba $V = \frac{1}{4}(Sx - 2x^3)$; v. problema următoare.

20. a) Ecuaţiile $2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi S$, $\pi x^2 y = \pi V$ dau $f(x) = \frac{1}{2}(Sx - 2x^3) = V$, definită pentru valorile lui x pentru care $f(x) = V \geqslant 0$. Graficul acestei funcţii este arcul OMA din figura XIV. $M\left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6}}\right)$, $A\left(\sqrt{\frac{S}{2}}\right)$. b) În ecuaţia

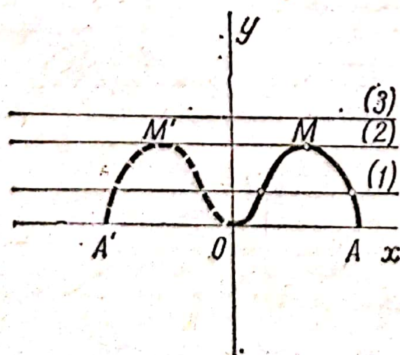


Fig. XII.

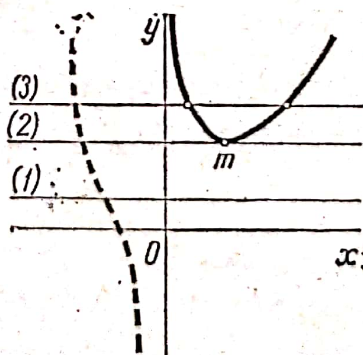


Fig. XIII.

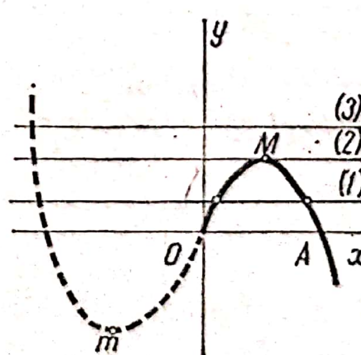


Fig. XIV.

$Sx - 2x^3 = \frac{7S\sqrt{S}}{27}$, se pune $x = z\sqrt{S}$; $x_1 = \frac{\sqrt{S}}{3}$, $x_2 = \frac{(\sqrt{15} - 1)\sqrt{S}}{6}$. *Altfel:* Ecuaţia $f(x) = V$ se rezolvă în raport cu S şi se construieşte curba $S = \frac{2x^3 + 2V}{x}$ (v. problema precedentă).

Notăm cu x_c valoarea rădăcinii dată de metoda coardei şi cu x_t sau x_t' valoarea dată de metoda tangentei aplicată, respectiv, punctului a sau b $(a < b)$.

21. a) $x_c = 2{,}4903$. $x_t' = 2{,}4909$. b) $x_c = 2{,}09425$, $x_t = 2{,}09457$. c) $x_c = 0{,}6517$, $x_t = 0{,}6539$.

22. În problemele în care intervin funcţii trigonometrice, trebuie luat ca unitate de măsură pentru arce radianul. Pentru transformarea gradelor în radiani şi invers, se folosesc tabele, de exemplu: Tabele matematice uzuale, Ed. tehnică 1965, Tabela IV. 1 (pag. 141). Logaritmii naturali se află de asemenea cu ajutorul unor tabele speciale, de exemplu în Tabelele citate: Tabela II. 4 (pag. 62–63) sau Tabela II. 6 (pag. 64).

a) $x_t = 154°28'$, $x_c = 154°29'$. b) $x_c = 42°20'3''$, $x'_t = 42°20'48''$. c) $x_c = 1{,}823$, $x_t = 1{,}826$. d) $x = 1$, $x_c = -1{,}872$, $x_t = -1{,}874$.

23. $x^3 - 6x^2 + 10 = 0$; $x_c = 1{,}5216$; $x_t = 1{,}5222$.

24. $10x^3 + 25x^2 - 64 = 0$; $x_c = 1{,}2979$. $x_t = 1{,}2981$.

25. Volumul segmentului sferic este $v = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ unde R este raza sferei, iar h înălţimea segmentului, $x^3 - 3R^2x + 2R^3\left(1 - \frac{2}{h}\right) = 0$, unde x este distanţa de la centrul sferei pînă la planul de secţiune.

26. Se egalează greutatea sferei cu greutatea apei dislocuite, apa dislocuită avînd forma de segment sferic de înălţimea x. Pentru volumul segmentului, v. problema precedentă; $10x^3 - 30x^2 + 28 = 0$; $x = 1{,}27346\ R$.

27. Fie AB diametrul şi AC coarda, măs. $\widehat{BC} = x$ (radiani); partea ABC se compune din triunghiul AOC şi sectorul circular BOC; $x + \sin x = \frac{\pi}{2}$.

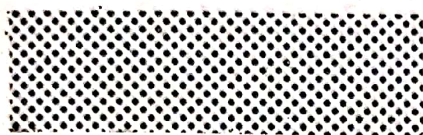
28, Fie AB diametrul, CD coarda, măs. $\widehat{BD} = x$ (radiani); aria porţiunii cuprinsă între AB şi CD se descompune în două sectoare circulare egale, BOD şi AOC şi triunghiul ODC; $x + \sin x \cos x = \frac{\pi}{4}$ sau, punînd $2x = u$, $u + \sin u = \frac{\pi}{2}$.

29. Notăm cu $2x$ unghiul la centru corespunzător, $\cos x - x = 0$, $x_c = 42°20'43''$, $x_t = 42°20'8''$.

30. Aceeaşi notaţie ca la problema precedentă. $2 \sin x - x = 0$, $x_c = 108°36'5''$, $x_t = 108°36'27''$.

31. $\operatorname{tg} x - 2x = 0$; $x_c = 66°46'8''$, $x_t = 66°47'5''$.

32. Aceeaşi ecuaţie ca la problema 31.



CAPITOLUL V

3. b) Nu, căci există un triplet (x, y, z) astfel încît $(x \top y) \top z \neq x \top (y \top z)$.

7. a) Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Ecuaţia devine: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Aşadar, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$. $x_4 = 2$ şi $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. b) Se pune $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se obţine: $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

9. b) Sistemul dat devine:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

10. $$\begin{Vmatrix} x & y \\ 2y & x \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} x' & y' \\ 2y' & x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xx' + 2yy' & xy' + x'y \\ 2x'y + 2xy' & 2yy' + xx' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x'' & y'' \\ 2y'' & x'' \end{Vmatrix}$$
unde $x'' = xx' + 2yy'$ şi $y'' = xy' + x'y$ $(x'' \in Q,\ y'' \in Q)$.

11. Fie $x = a + b\sqrt{5}$ şi $x' = a' + b'\sqrt{5}$, cu $a^2 - 5b^2 = 1$ şi $a'^2 - 5b'^2 = 1$.

Avem $x \cdot x' = aa' + 5bb' + (ab' + a'b)\sqrt{5}$.
$(aa' + 5bb')^2 - 5(ab' + a'b)^2 = a^2a'^2 + 10aa'bb' + 25b^2b'^2 - 5a'^2b'^2 - 10aa'bb' - 5a'^2b^2 = a^2(a'^2 - 5b'^2) - 5b^2(a'^2 - 5b'^2) = a^2 - 5b^2 = 1$. Deci $x \cdot x' \in M$.

12. Se observă că $x \top y = (x - 3)(y - 3) + 3$. **13.** a) Da. b.) Nu.

15. b) Nu, căci există un triplet (x, y, z) de elemente din E astfel încît $x \top (y \top z) \neq (x \top y) \top z$. Se va preciza un asemenea triplet.

16. b) Se obţine $(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = 36xyz + 18xy + 18xz + 18yz + 9x + 9y + 9z + 4$. c) $e = -\frac{1}{3}$, d) $x = \frac{-4 - 9a}{18a + 9}$, $\left(a \neq -\frac{1}{2}\right)$.

24. a) Avem:
$[A \cup (B \cup A)] \cup [B \cup (B \cup A)] = [A \cup (A \cup B)] \cup [(B \cup B) \cup A] = [(A \cup A) \cup B] \cup (B \cup A) = (A \cup B) \cup (A \cup B) = A \cup B$. b) $A \cap B$.

25. b) Elementele e, a, b, c se pot considera funcţiile definite pe $\{1, 2\}$ cu valori în $\{1, 2\}$ iar legea de compoziţie, compunerea.

34. c) $e = 2$. **35.** c) $e = a$.

37. b) Avem de exemplu: $\hat{3} \top \hat{4} = (\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}) + (\hat{4}\cdot\hat{3}) + \hat{4}\cdot\hat{4} + \hat{4}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4} = (\hat{3}\cdot\hat{3})\cdot\hat{4} = \hat{4}\cdot\hat{4} = \hat{1}$. Deci $\hat{3} \top \hat{4} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{1} + \hat{4} = (\hat{1} + \hat{2}) + (\hat{1} + \hat{4}) = \hat{3} + \hat{4} = \hat{3}$. Așadar, $\hat{3} \top \hat{4}$. La fel, se arată că $\hat{0} \top \hat{4} = \hat{0}$, $\hat{1} \top \hat{4} = \hat{1}$, $\hat{2} \top \hat{4} = \hat{2}$, $\hat{4} \top \hat{4} = \hat{4}$.

38. c) Se va folosi 5.1.25. **42.** a) Funcția $f: R \to R$ este inversabilă căci este bijectivă. Funcția g este inversabilă căci este bijectivă. b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

$\cdot g^{-1}(x) = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \dfrac{2}{3}$.

43. Exemplu: $(3 + 2\sqrt{2})^{-1} = 3 - 2\sqrt{2}$. **44.** a) $e = \dfrac{7}{3}$. b) $x' = \dfrac{-35 + 8x}{9(x-2)}$, $x \neq 2$.

45. Avem: $(\hat{3} \cdot x) + \hat{4} = \hat{9} \Rightarrow (\hat{3} \cdot x) + \hat{4} + (-\hat{4}) = \hat{9} + (-\hat{4}) . (\hat{3} \cdot x) + \hat{0} = \hat{5} \Rightarrow \hat{3} \cdot x = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}^{-1} \cdot (\hat{3} \cdot x) = \hat{3}^{-1} \cdot \hat{5} \Rightarrow (\hat{3}^{-1} \cdot \hat{3}) \cdot x = \hat{4} \cdot \hat{5} \Rightarrow \hat{1} \cdot x = \hat{9} \Rightarrow x = \hat{9}$.

Verificare: $(\hat{3} \cdot \hat{9}) + \hat{4} = \hat{5} + \hat{4} = \hat{9}$.

46. a) Avem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot$

$\cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ X\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon \circ X =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

48. b) $\begin{Vmatrix} x & 8y \\ y & x \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} x & -8y \\ -y & x \end{Vmatrix}$.

64 a) $x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot x^3 = x^2 \cdot e \Leftrightarrow x^3 = e$.

65. a) Din $x^2 = e$, rezultă $x = x^{-1}$. Avem: $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$.

68. c) Pentru ușurința raționamentelor se vor întocmi tabelele legilor de compoziție. d) Se vor nota convenabil elementele celor 3 structuri cu aceleși simboluri și se va observa că se obțin tabele identice. e) Se va observa că în toate cele trei structuri este adevărată egalitatea $x^2 = e$. Există un grup cunoscut cu patru elemente în care nu are loc o relație analogă.

71. a) Este indicată forma trigonometrică a numerelor complexe, pentru exprimarea rădăcinilor.

75. Dacă cele două inele ar fi izomorfe atunci ar exista $f: M \to P$ astfel încît $f(1) = 1$, $f(2) = f(1) + f(1) = 2$ și $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = f(2) = 2$. Așadar, $f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$, dar $\pm\sqrt{2} \in P$.

79. Înmulțind prima ecuație cu 3, obținem $\hat{9} \cdot x = \hat{9}$, cu soluțiile $x = \hat{1}$, $x = \hat{5}$, $x = \hat{9}$. Înlocuindu-se în ecuația a doua se află y. *Soluție.* $x = \hat{1}$, $y = \hat{2}$. Metoda substituției nu se poate aplica, deoarece $\hat{3}$ și $\hat{4}$ sînt inversabile.

84. a) Se va înlocui x pe rînd cu $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ și se va obține $x^5 + \hat{4}x = \hat{0}$. Explicația stă în faptul că în demonstrația că un polinom, cu coeficienți numerici, de gradul n este identic nul, cînd toți coeficienți sînt nuli, se presupunea existența a $n + 1$ valori distincte. În clasele de resturi modulo 5 nu există decît 5 valori distincte. b) Se va reface demonstrația dată în prima parte a manualului. Se mai folosește faptul că în inelul claselor de resturi modulo 5 nu sînt divizori ai lui 0. **85.** Există divizori ai lui 0.

88. Exemplu de divizori ai lui 0:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

89. Nu. **92.** a) $\{x \in R \; x = a + b\sqrt{c},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q, \sqrt{c} \notin Q\}$ b) $\{x \in R \mid x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ a \in Q,\ b \in Q,\ c \in Q,\ d \in Q\}$.

93. Se va ține seama că într-un corp nu avem divizori ai lui 0. **95.** c) Se va folosi punctul b) și problema 94 punctul c) Avem $x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ și deci $f(a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_n) = f(0)$ de unde $a_0 \bar{x}_0^n + a_1 \bar{x}_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

99. a) $\hat{4}$. b) $\hat{3}$. **100.** a) Deoarece $\delta(c)$ este soluție a ecuației $x^2 = c$, avem $(\delta(c))^2 = c$. $x^2 = c \Leftrightarrow x^2 - c = 0 \Leftrightarrow x^2 - [\delta(c)]^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \delta(c))(x + \delta(c)) = 0 \Leftrightarrow x = \delta(c)$ sau $x = -\delta(c)$. b) Se reface demonstrația cunoscută în cazul ecuației de gradul doi cu coeficienți reali. c) Avem $\delta(b^2 - 4ac) = \sqrt{b^2 - 4ac}$ și formula devine formula cunoscută. d) Ecuația $x^2 = b^2 - 4ac$, devine $x^2 = \hat{1}$ cu soluțiile $x = \hat{1}$ și $x = -\hat{1}$ $(x = \hat{4})$ Așadar, $x_{1,2} = \dfrac{-\hat{3} \pm \hat{1}}{\hat{2} \cdot \hat{2}} = \dfrac{-\hat{3} \pm \hat{1}}{\hat{2} \cdot \hat{2}}$.

$$x_1 = (-\hat{2}) \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{2}, \quad x_2 = (-\hat{4}) \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{1} \cdot \hat{4} = \hat{1}.$$

BIBLIOGRAFIE

Pentru aprofundarea problemelor conținute în acest manual recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. Arghiriade, E. Dragomir, A., Dragomir, P. D. — *Algebră*. București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
2. Coșniță, C. și Turtoiu, F. — *Culegere de probleme de matematici pentru examenele de bacalaureat și admitere în învățămîntul superior*, București, Editura tehnică, 1968.
3. Kuroș, A. G. — *Curs de algebră superioară* (trad. din lb. rusă). București, Editura tehnică, 1955.
4. Lascu, A. — *Exerciții de algebră*, București, Editura tehnică, 1967.
5. Stamate, I., Stoian I. — *Culegere de probleme de algebră*, București, Editura didactică și pedagogică, 1965.
6. *** — *„Gazeta matematică“, Seria B.*
7. Galbură, Gh. — *Introducere în algebră*, București, Editura tehnică, 1969.

CUPRINS